Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen,

als Beantwortung

einer von der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin

aufgestellten Preisfrage

von

Dr. C. H. Gräffe,
Professor der Mathematik.

Zürich,
Druck und Verlag von Friedrich Schultheß.
1837.

Vorwort.

In den meisten Fällen werden Schriften, die wie die vorliegende bestimmt sind, sich um einen ausgesetzten Preis zu bewerben, vor der Entscheidung ihres Schicksales nicht der Oeffentlichkeit übergeben. Da jedoch diese Entscheidung erst im Jahre 1838 erfolgen wird, und anderseits der Verfasser sich schmeichelt, daß seine Methode, die Wurzeln numerischer Gleichungen zu berechnen, auch selbst in dem Falle berücksichtigt zu werden verdient, wenn andere Methoden noch schneller zum Ziele führen sollten, so glaubt er hierin eine hinreichende Entschuldigung für die vorzeitige Bekanntmachung seiner Arbeit zu finden.

Daß der Verfasser hier auch die älteren Methoden, die unmöglichen Wurzeln zu berechnen, darzustellen versucht hat, ist ebenfalls nachsichtig zu beurtheilen, indem es ihm Gelegenheit gab, tiefer in die Beziehungen zwischen den recurrirenden Reihen und den Wurzeln der Gleichung einzugehen und zu zeigen, was auf diesem von Fourier angedeuteten Wege geleistet werden könne. Endlich muß noch bemerkt werden, daß die vorliegende kleine Schrift hinsichtlich der sorgfältigen Bearbeitung noch manches zu wünschen übrig läßt; sollte jedoch die Methode des Verfassers den Beifall der Mathematiker erhalten, so dürfte eine vollständige Abrundung derselben leicht zu erzielen seyn.

Zürich im October 1836.

Einleitung.

Die algebraischen Gleichungen waren schon sehr oft Gegenstand mathematischer Forschung, theils wegen der merkwürdigen Beziehungen, die sie darbieten und theils wegen ihres vielseitigen Gebrauches. Vielleicht ist es aber auch der Umstand, daß sich der allgemeinen Auflösung der Gleichungen, welche den 4ten Grad übersteigen, unübersteigliche Hindernisse in den Weg zu stellen scheinen, welcher mit diesen Untersuchungen einen eigenthümlichen Reiz verknüpft, wodurch fast jeder Mathematiker versucht wird, an denselben seine Kräfte zu prüfen. Auf diesem Wege ist nun zwar nicht das Gesuchte, aber eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften der Gleichungen gefunden worden, so daß dadurch die Lehre derselben zu einem besondern sehr wichtigen Abschnitt der Analysis herangebildet worden ist. Seitdem aber Abel und Ruffini bewiesen haben, daß die allgemeine Auflösung der Gleichungen höherer Grade wenigstens durch algebraische Functionen der Coefficienten derselben nicht möglich sei, hat man alle Bestrebungen auf die Auflösungen der numerischen Gleichungen gerichtet, um die Regeln zu vervollständigen, nach welchen die Wurzeln einer Gleichung für jeden speciellen Fall leicht und sicher berechnet werden können. Diese Regeln sind nun auch in Beziehung auf die reellen Wurzeln, besonders durch die letzten Arbeiten Fouriers so vervollkommt, daß man diesen Theil der Untersuchung für geschlossen erklärt hat; allein in Beziehung auf die unmöglichen Wurzeln ist dieses keineswegs der Fall. Zwar hat man verschiedene von ausgezeichneten Mathematikern vorgeschriebene Wege, die zum Ziele führen, allein diese sind bei Gleichungen, deren Grad nur einigermaßen beträchtlich ist, so beschwerlich, daß man sie kaum zu betreten wagt. Es ist daher diese Aufgabe, wie dieses sehr häufig in der Mathematik der Fall ist, zwar theoretisch genügend gelöst, aber die Auflösung hat keinen practischen Werth. Alles was bisher geschehen ist, um dem Ziele näher zu kommen, hatte keinen günstigen Erfolg, und wir werden in dem Folgenden zeigen, daß selbst Fouriers Methode, so weit sie aus seinen Andeutungen hervorgeht *), nicht zum Ziele geführt haben kann, abgesehen von der mühsamen Berechnungsweise, die sie unter gewissen Verhältnissen erfordert haben würde.

*) Analyse des équations déterminées pag. 71.

Diese Umstände haben die Academie der Wissenschaften zu Berlin bewogen, diesen Gegenstand zu einer Preisfrage zu machen, und in Folge eines Versuches dieselbe zu beantworten, sind die nachfolgenden Blätter entstanden. In denselben hat der Verfasser eine Methode entwickelt, nach welcher die unmöglichen Wurzeln verhältnißmäßig leicht und völlig sicher gefunden werden können. Zugleich aber werden durch dieselbe Methode auch die reellen Wurzeln gefunden, und zwar wenn man mehrere reelle Wurzeln einer Gleichung sucht, deren Grad beträchtlich ist, leichter und bequemer als nach den bisherigen Methoden.

Die bisherigen Methoden sowohl zur Auffindung der reellen als auch der unmöglichen Wurzeln sind allerdings allgemein bekannt, jedoch hat der Verfasser geglaubt, über einige der wichtigsten Regeln in Beziehung auf die unmöglichen Wurzeln hier eintreten zu müssen, theils um den Rechnungsaufwand, den sie erfordern, zu prüfen, und theils um bei den Methoden, wo die recurrirenden Reihen in Anwendung kommen, einiges Neue hinzuzufügen, welches eine Wiederherstellung der Methode Fouriers bezweckt.

Demgemäß folgen zunächst die Eliminationsmethode; die Methode von Lagrange, vermittelst der Gleichung deren Wurzeln Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; die Auflösungsweise vermittelst der recurrirenden Reihen, und endlich die Methode des Verfassers. Die beiden ersten Methoden suchen Gleichungen zu bilden, in welchen einer der beiden Theile x oder y der unmöglichen Wurzel, $x \pm y \sqrt{-1}$ als reelle Wurzel vorkömmt, und diese Methoden würden alsdann ihre höchste Vollendung erhalten haben, wenn man durch sie eine Gleichung finden könnte, deren Wurzeln sowohl die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung als auch die reellen Theile x und y der unmöglichen Wurzeln sind, und deren Grad daher nicht höher als der Grad der gegebenen Gleichung ist. Allein von diesem Ziele sind die obigen Methoden noch weit entfernt. Durch die recurrirenden Reihen erhält man das Produkt und die Summe der unmöglichen Wurzeln, aber nur unvollkommen, und durch die Methode des Verfassers zunächst das Produkt oder den Modulus der unmöglichen Wurzeln auf eine sichere Weise, und alsdann auf verschiedenen Wegen den zugehörigen Winkel, oder auch ohne diesen die beiden Zahlen x und y.

Die Berechnung der unmöglichen Wurzeln durch die Eliminationsmethode.

Wir haben schon in der Einleitung angedeutet, daß sich bei der Berechnung der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung die einfache Idee zunächst aufdrängt, aus der gegebenen Gleichung solche Gleichungen zu bilden, die die reellen Werthe x und y der unmöglichen Wurzel $x + y\sqrt{-1}$ als Wurzeln enthalten. Dieser Weg wird auch bei der Eliminationsmethode befolgt, nur erreichen hierbei die neuen Gleichungen einen so hohen Grad, daß der Rechnungsmechanismus dadurch äußerst beschwerlich wird. Zu dieser Methode kann man sowohl durch geometrische Betrachtung, als auch auf analytischem Wege gelangen, da wir jedoch hier nur den Aufwand von Arbeit, den sie erfordert, zu prüfen haben, so wollen wir nur den letzteren Gesichtspunkt ins Auge fassen.

Hat man eine Gleichung von der Form:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \text{ oder kürzer:}$$
$$F(z) = 0$$

und ist $z_1 = x + y\sqrt{-1}$ eine unmögliche Wurzel derselben, so hat man:

$$F(x + y\sqrt{-1}) = 0$$

Entwickelt man dieses nach Potenzen von $y\sqrt{-1}$ fortschreitend, so erhält man:

$$F_0 + F_1 y\sqrt{-1} - F_2 y^2 - F_3 y^3 \sqrt{-1} + F_4 y^4 \ldots\ldots (-1)^{\frac{q}{2}} F_q y^q \ldots\ldots$$

wobei der Kürze wegen der Ausdruck:

$$\frac{d^q F(x + y\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots\ldots q\, d(y\sqrt{-1})^q}$$

nachdem in demselben $y = 0$ gesetzt wurde, mit F_q bezeichnet ist.

Soll die obige Reihe $= 0$ seyn, so ist dieses nicht anders möglich, als wenn die reellen Glieder derselben für sich, und eben so die unmöglichen Glieder für sich $= 0$ sind. Hierdurch erhält man, wenn n eine gerade Zahl ist, die beiden Gleichungen:

$$1)\quad F_0 - F_2 y^2 + F_4 y^4 \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-2}{2}} F_{n-2} y^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}} y^n = 0$$

$$2)\quad F_1 - F_3 y^2 + F_5 y^4 \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-4}{2}} F_{n-3} y^{n-4} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} F_{n-1} y^{n-2} = 0$$

wobei in der zweiten der gemeinschaftliche Factor $y\sqrt{-1}$ abgesondert worden ist. Ist aber n eine ungerade Zahl, so erhält man die beiden Gleichungen:

3) $F_0 - F_2y^2 + F_4y^4 \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} F_{n-3}y^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} F_{n-1}y^{n-1} = 0$

4) $F_1 - F_3y^2 + F_5y^4 \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} F_{n-2}y^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} y^{n-1} = 0$

Die Coefficienten dieser Gleichungen sind ganze rationale Functionen von x, und die Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, diejenigen Werthe von x und y zu finden, die beiden Gleichungen zugleich ein Genüge leisten. Zu diesem Behufe eliminiren wir nach den bekannten Methoden y aus den beiden Gleichungen, so geben die reellen Wurzeln der resultirenden Gleichung die Werthe von x, zu welchen alsdann vermittelst der beiden obigen Gleichungen, indem man für einen dieser Werthe von x den gemeinschaftlichen Factor derselben berechnet, die correspondirenden Werthe von y gesucht werden müssen.

Das unzweckmäßigste Verfahren der Elimination ist dasjenige, wo der bei der Aufsuchung eines gemeinschaftlichen Theilers beider Gleichungen zuletzt übrigbleibende kein y mehr enthaltende Rest gleich 0 gesetzt wird, weil hierbei der Grad der resultirenden Gleichung im Allgemeinen sehr gesteigert wird. Wir wollen uns daher einer andern Methode bedienen, und zu diesem Behufe die beiden Gleichungen zunächst für den Fall, wenn n eine gerade Zahl ist, auf die Form bringen:

5) $y^n + A_2y^{n-2} + A_4y^{n-4} \ldots\ldots A_{n-2}y^2 + A_n = 0$

6) $A_1y^{n-2} + A_3y^{n-4} + A_5y^{n-6} \ldots\ldots A_{n-3}y^2 + A_{n-1} = 0$

wobei der Grad, welchen die ganzen rationalen Functionen von x in den Coefficienten besitzen, durch die Zeiger derselben angegeben wird. Da diese Gleichungen in Beziehung auf y paarweise gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte, Wurzeln besitzen, und wir nur die absoluten Werthe derselben zu kennen brauchen, so setzen wir $y = \sqrt{w}$ und $\frac{n}{2} = p$ und erhalten dadurch:

7) $w^p + A_2w^{p-1} + A_4w^{p-2} \ldots\ldots A_{n-2}w + A_n = 0$

8) $A_1w^{p-1} + A_3w^{p-2} + A_5w^{p-3} \ldots\ldots A_{n-3}w + A_{n-1} = 0$

hat nun die erste Gleichung für ein bestimmtes x die p Wurzeln $w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots w_p$ und bildet man das Produkt:

$$\begin{aligned}
&[A_1w_1^{p-1} + A_3w_1^{p-2} + A_5w_1^{p-3} \ldots\ldots A_{n-3}w_1 + A_{n-1}]\\
\times&[A_1w_2^{p-1} + A_3w_2^{p-2} + A_5w_2^{p-3} \ldots\ldots A_{n-3}w_2 + A_{n-1}]\\
\times&[A_1w_3^{p-1} + A_3w_3^{p-2} + A_5w_3^{p-3} \ldots\ldots A_{n-3}w_3 + A_{n-1}]\\
&\vdots\\
\times&[A_1w_p^{p-1} + A_3w_p^{p-2} + A_5w_p^{p-3} \ldots\ldots A_{n-3}w_p + A_{n-1}]
\end{aligned}$$

so muß für denselben Werth von x eine der p Wurzeln auch der zweiten Gleichung ein Genüge leisten und daher einen dieser Factoren und dadurch das ganze Produkt zum Verschwinden bringen. Führt man die in diesem Produkte angedeuteten Multiplikationen aus, so erhält man hierbei symmetrische Functionen dieser Wurzeln, weil das angedeutete Produkt in dieser Beziehung symmetrisch ist. Diese symmetrischen Functionen können aber aus dem Coefficienten A_2, A_4, A_6 ꝛc. der obern Gleichung (7) berechnet und dadurch aus dem Produkte eliminirt werden. Nach Vollziehung dieser Rechnung erhält man eine Endgleichung, die nur noch x enthält, und die daher die verlangte Gleichung ist. Man sieht sogleich auf den ersten Blick, daß diese Gleichung vom $\frac{n(n-1)}{2}$ Grade ist, und durch ein ganz gleiches Verfahren erhält man auch für den Fall, wenn n ungerade ist, ebenfalls eine Endgleichung für x, deren Grad $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Untersuchen wir jetzt, die zur Ausführung des vorgeschriebenen Verfahrens erforderlichen Rechnungen, so zeigt sich sogleich, daß diese äußerst mühsam sind, und zwar steigt die Arbeit auf eine ganz unverhältnißmäßige Weise mit dem Grade der Gleichung, denn theils wird dadurch die Elimination immer schwieriger, und theils wird der Grad der Endgleichung immer höher. So erhält man z. B. bei einer Gleichung vom 4ten Grade eine Endgleichung vom 6ten Grade,

„	„	„	„	5ten	„	„	„	„ 10ten	„
„	„	„	„	6ten	„	„	„	„ 15ten	„
„	„	„	„	7ten	„	„	„	„ 21ten	„
„	„	„	„	8ten	„	„	„	„ 28ten	„

Hieraus folgt, daß man wohl schwerlich versucht seyn wird, z. B. eine Gleichung vom 8ten Grade mit vier Paar unmöglicher Wurzeln nach dieser Methode zu lösen.

Berechnung der unmöglichen Wurzeln durch die Methode von Lagrange.

Auch dieser Methode liegt die Idee zum Grunde, die Berechnung der unmöglichen Wurzeln auf die Berechnung reeller Wurzeln zurückzuführen. Allein obgleich sie sinnreicher als die vorige erscheint, so ist sie jedoch keineswegs geeignet, dieselbe zu verdrängen, da der Mechanismus derselben äußerst mühsam ist, und vielleicht noch größere Arbeit erfordert, als mit der Eliminationsmethode verbunden ist. Aus diesem Grunde wollen wir uns auch hier damit begnügen, eine kurze Darstellung derselben zu geben, die hinreichend ist, den Rechnungsaufwand derselben übersehen zu können.

Hat man die Gleichung:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots\ldots\ldots a_{n-1} z + a_n = 0$$

deren Wurzeln w_1, w_2, $w_3 \ldots\ldots w_n$ sind, so kann man vermittelst der bekannten Summenformeln:

$$\begin{aligned}
S_1 &= -a_1 \\
S_2 &= -a_1 S_1 - 2a_2 \\
S_3 &= -a_1 S_2 - a_2 S_1 - 3a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= -a_1 S_{n-1} - a_2 S_{n-2} - a_3 S_{n-3} \ldots - a_{n-1} S_1 - n a_n \\
S_{n+1} &= -a_1 S_n - a_2 S_{n-1} - a_3 S_{n-2} \ldots - a_{n-1} S_2 - a_n S_1 \text{ ꝛc.}
\end{aligned}$$

wo allgemein $S_p = w_1^p + w_2^p + w_3^p \ldots\ldots w_n^p$ bedeutet, die Summen der Potenzen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung successive berechnen. Umgekehrt kann man hieraus, wenn diese Summen bekannt sind, die Coefficienten der Gleichung berechnen, denn man erhält aus den obigen Recursionsformeln die folgenden:

$$a_1 = -S_1$$
$$a_2 = -\frac{a_1S_1 + S_2}{2}$$
$$a_3 = -\frac{a_2S_1 + a_1S_2 + S_3}{3}$$
$$a_4 = -\frac{a_3S_1 + a_2S_2 + a_1S_3 + S_4}{4}$$
$$\vdots$$
$$a_n = -\frac{a_{n-1}S_1 + a_{n-2}S_2 + \ldots\ldots a_1S_{n-1} + S_n}{n}$$

Nach der Binomialformel hat man ferner:

$$(w-\alpha)^{2p} = w^{2p} - \binom{2p}{1}w^{2p-1}\alpha + \binom{2p}{2}w^{2p-2}\alpha^2 \ldots\ldots - \binom{2p}{2p-1}w\alpha^{2p-1} + \alpha^{2p}$$

wo durch $\binom{2p}{q}$ der bekannte Binomialcoefficient ausgedrückt wird. Setzt man hierin für α nach und nach die Werthe $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ und addirt alle Resultate, so erhält man:

$$(w-w_1)^{2p} + (w-w_2)^{2p} + (w-w_3)^{2p} \ldots\ldots (w-w_n)^{2p} =$$
$$nw^{2p} - \binom{2p}{1}w^{2p-1}S_1 + \binom{2p}{2}w^{2p-2}S_2 - \ldots\ldots\ldots - \binom{2p}{2p-1}wS^{2p-1} + S_{2p}$$

wo S_q seine frühere Bedeutung hat. Setzt man in dieser Gleichung für w nach und nach die Werthe $w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots w_n$ und addirt wieder alle Resultate, so erhält man auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die p^{ten} Potenzen der Quadrate aller möglichen Differenzen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung, oder wenn wir die ganze Summe derselben mit Σ_p bezeichnen:

$$\Sigma_p = nS_{2p} - \binom{2p}{1}S_{2p-1}S_1 + \ldots\ldots\ldots (-1)^p\binom{2p}{p}S_pS_p \ldots\ldots\ldots - \binom{2p}{2p-1}S_1S_{2p-1} + nS_{2p}$$

oder da hier die Glieder der Reihe, von beiden Enden angefangen, immer paarweise einander gleich sind, so hat man:

$$\Sigma_p = 2[nS_{2p} - \binom{2p}{1}S_{2p-1}S_1 + \binom{2q}{2}S_{2p-2}S_2 \ldots\ldots\ldots (-1)^p\tfrac{1}{2}\binom{2p}{p}S_pS_p]$$

Da hier alle möglichen Differenzen der Wurzel gebildet sind, so wird man jedesmal neben einer Differenz, z. B. $w_1 - w_2$, eine andere finden, $w_2 - w_1$, die nur im Zeichen von jener verschieden ist. Da dieses Zeichen aber bei der Quadrirung verschwindet, so sind diese Potenzen der Differenzen immer paarweise einander gleich. Versteht man daher in dem Folgenden unter Σ_p nur die Summe der Potenzen derjenigen Differenzen, wobei stets zwei andere Wurzeln von einander abgezogen wurden, so hat man:

$$1)\quad \Sigma_p = nS_{2p} - \binom{2p}{1}S_{2p-1}S_1 + \binom{2p}{2}S_{2p-2}S_2 - \ldots\ldots (-1)^p\tfrac{1}{2}\binom{2p}{p}S_pS_p$$

Die vorgelegte Gleichung vom n^{ten} Grade gestattet nun, so viele der obigen Differenzen zu bilden, als sich ihre n Wurzeln zu je zwei combiniren lassen, d. h. $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Differenzen. Berechnet man daher vermittelst der Coefficienten der gegebenen Gleichung die Größen S_1, S_2, S_3 rc.,..

leitet man ferner aus diesen vermittelst der Formel (1) die Summen Σ_1, Σ_2, Σ_3 ꝛc. bis zum Zeiger $\frac{n(n-1)}{1.2}$ ab, wozu die Summen S_1, S_2, S_3 bis zum Zeiger $n(n-1)$ erforderlich sind, und berechnet man endlich aus den Summen Σ_1, Σ_2, Σ_3 ꝛc. die Coefficienten C_1, C_2, C_3 ꝛc. bis zum Zeiger $\frac{n(n-1)}{1.2}$, so gehören diese einer Gleichung an, deren $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Hierbei ist jedoch wohl zu bemerken, daß je zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung stets nur eine Differenz bilden.

Hat nun die vorgelegte Gleichung reelle und unmögliche Wurzeln, und denkt man sich die Differenzen derselben im obigen Sinne gebildet, so sind die Quadrate der Differenzen reeller Wurzeln stets positiv, die Quadrate ferner der Differenzen zwischen reellen und unmöglichen Wurzeln im Allgemeinen unmöglich und eben so die Quadrate der Differenzen der unmöglichen aber nicht zusammengehörenden Wurzeln; und nur die Quadrate der Differenzen zusammengehöriger unmöglicher Wurzeln von der Form $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$, geben reelle negative Werthe von der Form $-4q^2$. Sucht man daher die negativen Wurzeln der abgeleiteten Gleichung, nimmt sie mit positiven Zeichen, zieht aus denselben die Quadratwurzel und dividirt sie durch 2, so erhält man die mit dem Factor $\sqrt{-1}$ verbundenen Werthe der unmöglichen Wurzeln der gegebenen Gleichung. Zu diesen Werthen müssen dann endlich noch die reellen Theile der unmöglichen Wurzeln, vermittelst der beiden Gleichungen, gesucht werden, die wir schon bei der Eliminationsmethode dargestellt haben, indem wir nämlich für y einen der gefundenen Werthe substituiren und in Beziehung auf x eine gemeinschaftliche Wurzel beider Gleichungen suchen.

Um nach dieser Methode eine Gleichung vom 4ten Grade aufzulösen, müssen wir eine Gleichung von $\frac{4.3}{2} = 6^{\text{ten}}$ Grade bilden, deren Coefficienten aus den Größen Σ mit den Zeigern von 1 bis 6 berechnet werden, wozu wieder die Größen S mit den Zeigern von 1 bis 12 erforderlich sind u. s. f. wie folgende Tabelle zeigt, worin n der Grad der gegebenen Gleichung und m der Grad der zu bildenden Gleichung ist:

$n = 4$,	$m = 6$,	Σ	von 1	bis 6,	S	von 1	bis 12	
$n = 5$,	$m = 10$,	Σ	„ 1	„ 10,	S	„ 1	„ 20	
$n = 6$,	$m = 15$,	Σ	„ 1	„ 15,	S	„ 1	„ 30	
$n = 7$,	$m = 21$,	Σ	„ 1	„ 21,	S	„ 1	„ 42	
$n = 8$,	$m = 28$,	Σ	„ 1	„ 28,	S	„ 1	„ 56	ꝛc.

Hierbei tritt ferner noch der Uebelstand ein, daß wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht sehr kleine Zahlen sind, wobei die unmöglichen Wurzeln nach der Größe des Modulus geschätzt werden, die Summen S zu sehr großen Zahlen anwachsen, ohne daß sie dadurch einer Abkürzung fähig werden, indem man vermittelst dieser großen Zahlen zu dem Coefficienten der neuen Gleichung gelangt, welche verhältnißmäßig nur kleine Zahlen sind. Außerdem kann der Fall eintreten, daß auch noch andere negative Wurzeln in der gebildeten Gleichung vorkommen, als die oben angedeuteten, indem bei den Differenzen, die im Allgemeinen unmöglich ausfallen, die reellen Theile sich aufheben können, so daß die Quadrate derselben ebenfalls negativ werden. Dieses giebt zwar stets wiederholte Wurzeln, allein gerade die Prüfung in Beziehung auf wiederholte Wurzeln erschwert wieder bei dem hohen Grade der abgeleiteten Gleichung diese Methode. Endlich ist auch noch die Aufsuchung der reellen Theile der Wurzeln zu den gefundenen unmöglichen Theilen mit nicht geringer Mühe verknüpft, so daß auch diese Methode immer noch eine einfachere Methode wünschenswerth läßt.

Auflösung der numerischen Gleichungen durch die recurrirenden Reihen.

Bei diesen Methoden wird ein ganz anderes Princip, als auf welchem die vorigen sich gründeten, in Anwendung gebracht, indem wir durch dasselbe nicht allein die unmöglichen Wurzeln direkt, sondern auch die reellen Wurzeln zu berechnen suchen. Aber auch in Beziehung auf die reellen Wurzeln unterscheidet es sich wesentlich von den Principien, auf die alle andern Methoden, welche wir bei der Berechnung der reellen Wurzeln in Anwendung bringen, sich stützen. Wir werden sogleich Gelegenheit haben, dieses sehr wichtige Princip auszusprechen.

Schon D. Bernouilli zeigte, wie durch die recurrirenden Reihen die Wurzeln einer Gleichung gefunden werden können, allein Euler ging zuerst in eine schärfere Untersuchung dieses Gegenstandes ein, und zeigte zugleich die Mangelhaftigkeit dieses Verfahrens. *) Seine Entwicklungen sind im Kurzen die Folgenden:

Hat man die Gleichung:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots\ldots a_{n-1} z + a_n = 0$$

und besteht diese aus den Factoren:

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots\ldots(z-\alpha_n)$$

so erhält man durch Umkehrung der Wurzeln die Gleichung:

$$1 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots\ldots a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

und diese besteht aus den Factoren:

$$(1-\alpha_1 z)(1-\alpha_2 z)(1-\alpha_3 z)\ldots\ldots(1-\alpha_n z)$$

Entwickelt man hierauf den Quotienten:

$$\frac{1}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots\ldots a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n}$$

dessen Zähler wir der Einfachheit wegen $= 1$ setzen, in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe von der Form:

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots\ldots A_p z^p + A_{p+1} z^{p+1} \text{ 2c.}$$

*) Introductio in Analysin infinit. T. I. p. 276.

so nähert sich der Quotient $\frac{A_{p+1}}{A_p}$ beim Wachsen von p der größten Wurzel der vorgelegten Gleichung. Zerlegt man nämlich den obigen Bruch in die Partialbrüche:

$$\frac{A}{1-\alpha_1 z}+\frac{B}{1-\alpha_2 z}+\frac{C}{1-\alpha_3 z}+\ldots\ldots\frac{N}{1-\alpha_n z}$$

entwickelt jeden einzelnen in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe, und addirt diese Reihen, so erhalten die beiden obigen Coefficienten die Form:

$$\begin{aligned}A_{p+1} &= A\alpha_1^{p+1}+B\alpha_2^{p+1}+C\alpha_3^{p+1}+\ldots\ldots N\alpha_n^{p+1}\\ A_p &= A\alpha_1^{p}+B\alpha_2^{p}+C\alpha_3^{p}+\ldots\ldots N\alpha_n^{p}\end{aligned}$$

Ist nun α_1 eine reelle Wurzel und dem absoluten Zahlwerthe nach größer als jede der anderen Wurzeln, und wenn unter diesen unmögliche sind, größer als der Modulus derselben, so verschwinden bei hinreichender Größe von p die Potenzen der kleinern Wurzeln gegen die der größten, und man hat daher:

$$\frac{A_{p+1}}{A_p}=\frac{A\alpha_1^{p+1}}{A\alpha_1^{p}}=\alpha_1$$

Hieraus sieht man sogleich, wie beschränkt dieses Verfahren ist, indem man nur unter gewissen Voraussetzungen eine Wurzel der gegebenen Gleichung erhält, und wenn z. B. der Modulus einer unmöglichen Wurzel größer ist, als jede andere reelle Wurzel, so führt es zu keinem Ziele. Man sieht aber hierbei, daß dieses Verfahren sich darauf gründet: durch successives Potenziren der Wurzeln die übrigen Wurzeln in Beziehung auf die größte Wurzel zum Verschwinden zu bringen. Diese Potenzirung wird hier durch die Entwicklung des vorgelegten Quotienten in eine recurrirende Reihe vollzogen.

Diese Methode blieb lange in diesem unvollkommenen Zustande, wenigstens wurde sie nicht wesentlich verbessert, und erst Fourier in seinem vortrefflichen Werke über die Gleichungen sagt, daß er diese Methode weiter ausgebildet habe, so daß er alle Wurzeln der Gleichung durch dieselbe zu finden im Stande sey, und giebt zu gleicher Zeit Andeutungen über sein hierbei befolgtes Verfahren. Allein leider sind diese Arbeiten unvollendet geblieben oder wenigstens nicht öffentlich erschienen.

Diese Bemerkungen zogen natürlich die Aufmerksamkeit der Mathematiker wieder auf diesen Gegenstand, und Stern, in seiner Theorie der Kettenbrüche, gab ebenfalls recurrirende Reihen an, durch welche man die Wurzeln der Gleichung finden kann, die aber keineswegs mit denen von Fourier angedeuteten übereinstimmen.

Wir wollen auch hier untersuchen, inwiefern diese Methode von uns wieder hergestellt werden kann, und wenn wir in dieser Beziehung seine Bemerkungen genauer prüfen, so scheint unzweifelhaft aus denselben hervorzugehen, daß seine erste recurrirende Reihe dieselbe ist, die wir vorhin entwickelt haben. Um die Beschaffenheit dieser Reihe etwas näher kennen zu lernen, wollen wir den Quotienten in Factoren zerlegen und jeden einzelnen in eine Reihe entwickeln, wir erhalten alsdann:

$$\frac{1}{1-\alpha_1 x} = 1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_1^3 x^3 \ldots\ldots + \alpha_1^r x^r$$
$$\frac{1}{1-\alpha_2 x} = 1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_2^3 x^3 \ldots\ldots + \alpha_2^r x^r$$
$$\frac{1}{1-\alpha_3 x} = 1 + \alpha_3 x + \alpha_3^2 x^2 + \alpha_3^3 x^3 \ldots\ldots + \alpha_3^r x^r$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1-\alpha_n x} = 1 + \alpha_n x + \alpha_n^2 x^2 + \alpha_n^3 x^3 \ldots\ldots + \alpha_n^r x^r$$

Multiplicirt man diese Reihen mit einander und entwickelt dieses Produkt nach Potenzen von x fortschreitend, so erhält man als Coeffcienten Variationsformen zu bestimmten Summen, deren Elementenzeiger sich auf die Coefficienten der obigen Reihen beziehen. Allein wegen der besonderen Beschaffenheit dieser Coefficienten zeigt sich, daß diese Variationsformen in die Combinationsformen übergehen, deren unbedingt wiederholbaren Elemente die Wurzeln α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ sind. Es ist daher das obige Produkt:

$$\frac{1}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)\ldots\ldots(1-\alpha_n x^n)} = \frac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots a_n x^n}$$
$$= 1 + \overset{1}{C}(1\ldots.n)x + \overset{2}{C}(1\ldots n)x^2 + \overset{3}{C}(1\ldots n)x^3 + \ldots\ldots \overset{p}{C}(1\ldots..n)x^q + \overset{p+1}{C}(1\ldots.n)x^{p+1} + \ldots..$$

Hier ist natürlich das Gleichheitszeichen in dem Sinne zu nehmen, daß die Reihe nur die angefangene Entwicklung des Quotienten in eine unendliche Reihe ist.

Hat man nun die beiden Gleichungen:

$$x^q + a_1 x^{q-1} + a_2 x^{q-2} \ldots\ldots a_{q-1} x + a_q = 0$$
$$x^{n-q} + b_1 x^{n-q-1} + b_2 x^{n-q-2} \ldots\ldots b_{n-q-1} x + b_{n-q} = 0$$

deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_q$ und $\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2} \ldots\ldots \alpha_n$ sind, so erhält man aus diesen die Quotienten:

$$1)\quad \frac{1}{1 + x_1 x + a_2 x^2 + \ldots.\, a_q x^q} = 1 + \overset{1}{C}(1\ldots q)x + \overset{2}{C}(1\ldots q)x^2 \ldots\ldots \overset{p}{C}(1\ldots q)x^r$$

$$2)\quad \frac{1}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.\, b_{n-q} x^{n-q}} = 1 + \overset{1}{C}((q+1)\ldots.n)x + \overset{2}{C}((q+1)\ldots.n)x^2 \ldots. \overset{p}{C}(q+1)\ldots n)x^p$$

wo sich die Elementenzeiger der Combinationsformen auf die mit denselben Zeigern versehenen Wurzeln α_1, α_2 bis α_n beziehen. Durch die Multiplikation beider Quotienten erhalten wir:

$$\frac{1}{1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots A_n x^n} = 1 + \overset{1}{C}(1\ldots.n)x + \overset{2}{C}(1\ldots.n)x^2 + \overset{3}{C}(1\ldots.n)x^3 + \ldots.\, \overset{p}{C}(1\ldots.n)x^p$$

Hieraus folgt, daß:

$$3)\quad \overset{p}{C}(1\ldots n) = \overset{p}{C}(1\ldots.q) + \overset{p-1}{C}(1\ldots q)\,\overset{1}{C}((q+1)\ldots.n) + \overset{p-2}{C}(1\ldots q)\,\overset{2}{C}(q+1)..n)$$
$$\ldots.. + \overset{1}{C}(1\ldots q)\,\overset{p-1}{C}((q+1)\ldots n) + \overset{p}{C}((q+1)\ldots.n)$$

Es ist aber vermöge der Recursionsscale der Coefficienten des ersten Quotienten:

$$\overset{p}{C}(1\ldots q) = -\, a_1\overset{p-1}{C}(1\ldots q) - a_2\overset{p-2}{C}(1\ldots q) \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{q-2}\overset{p-q+2}{C}(1\ldots q) - a_{q-1}\overset{p-q+1}{C}(1\ldots q) - a_q\overset{p-q}{C}(1\ldots q)$$

$$\overset{p-1}{C}(1\ldots q) = -\, a_1\overset{p-2}{C}(1\ldots q) - a_2\overset{p-3}{C}(1\ldots q) \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{q-2}\overset{p-q+1}{C}(1\ldots q) - a_{q-1}\overset{p-q}{C}(1\ldots q) - a_q\overset{p-q-1}{C}(1\ldots q)$$

$$\vdots$$

$$\overset{q}{C}(1\ldots q) = -\, a_1\overset{q-1}{C}(1\ldots q) - a_2\overset{q-2}{C}(1\ldots q) \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{q-2}\overset{2}{C}(1\ldots q) - a_{q-1}\overset{1}{C}(1\ldots q) - a_q$$

$$\overset{q-1}{C}(1\ldots q) = -\, a_1\overset{q-2}{C}(1\ldots q) - a_2\overset{q-3}{C}(1\ldots q) \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{q-2}\overset{1}{C}(1\ldots q) - a_{q-1}$$

$$\overset{q-2}{C}(1\ldots q) = -\, a_1\overset{q-3}{C}(1\ldots q) - a_2\overset{q-4}{C}(1\ldots q) \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{q-2} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (3), so erhält man:

$$\begin{aligned}\overset{p}{C}(1\ldots n) = &- a_1[\overset{p-1}{C}(1\ldots q) + \overset{p-2}{C}(1..q)\overset{1}{C}((q+1)\ldots n) + \overset{p-3}{C}(1\ldots q)\overset{2}{C}((q+1)n) + \ldots\ldots + \overset{p-1}{C}((q+1)\ldots\ldots n)] \\ &- a_2[\overset{p-2}{C}(1\ldots q) + \overset{p-3}{C}(1..q)\overset{1}{C}((q+1)\ldots n) + \overset{p-4}{C}(1\ldots q)\overset{2}{C}((q+1)\ldots n) + \ldots\ldots + \overset{p-2}{C}((q+1)\ldots\ldots n)] \\ &- a_3[\overset{p-3}{C}(1\ldots q) + \overset{p-4}{C}(1..q)\overset{1}{C}((q+1)\ldots n) + \overset{p-5}{C}(1\ldots q)\overset{2}{C}((q+1)\ldots n) + \ldots\ldots + \overset{p-3}{C}((q+1)\ldots\ldots n)] \\ &\vdots \\ &- a_{q-1}[\overset{p-q+1}{C}(1\ldots q) + \overset{p-q}{C}(1..q)\overset{1}{C}((q+1)\ldots n) + \overset{p-q-1}{C}(1..q)\overset{2}{C}((q+1)\ldots n) + \ldots\ldots + \overset{p-q-1}{C}((q+1)\ldots n)] \\ &- a_q[\overset{p-q}{C}1(\ldots q) + \overset{p-q-1}{C}(1\ldots q)\overset{1}{C}((q+1)\ldots n) + \overset{p-q-2}{C}(1\ldots q)\overset{2}{C}((q+1)\ldots n) + \ldots\ldots + \overset{p-q}{C}((q+1)\ldots\ldots n)] \\ &+ \quad \overset{p}{C}((q+1)\ldots\ldots n)\end{aligned}$$

Da die Größen in den Klammern Produkte sind von der Form, die die Gleichung (3) angiebt, so haben wir hieraus:

$$4)\quad \overset{p}{C}(1\ldots n) = -\, a_1\overset{p-1}{C}(1\ldots n) - a_2\overset{p-2}{C}(1\ldots n) - a_3\overset{p-3}{C}(1\ldots n) \ldots\ldots - a_q\overset{p-q}{C}(1..n) + \overset{p}{C}((q+1)\ldots\ldots n)$$

Diese allgemeine Formel wollen wir jetzt specialisiren.

I. Bildet man nämlich aus der gegebenen Gleichung vom n^{ten} Grade:

$$5)\quad x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1}x + A_n = 0$$

den Divisor

$$6)\quad 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n$$

und denkt sich diesen zunächst in die beiden Factoren zerlegt:

$$(1 + a_1x)(1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots\ldots b_{n-1}x^{n-1})$$

so hat man in der obigen allgemeinen Formel (4) $q = 1$ und daher:

$$\overset{p}{C}(1\ldots\ldots n) = -\, a_1\overset{p-1}{C}(1\ldots n) + \overset{p}{C}(2\ldots n)$$

Hieraus folgt, da $-\, a_1 = +\, \alpha_1$ eine Wurzel der Gleichung (5) ist:

$$\alpha_1 = \frac{\overset{p}{C}(1\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)} - \frac{\overset{p}{C}(2\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$$

Wir haben aber oben gesehen, daß unter gewissen Bedingungen:

$$\alpha_1 = \frac{\overset{p}{C}(1\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$$

und es müssen daher diese Bedingungen so beschaffen seyn, daß $\frac{\overset{p}{C}(2\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$ eine verschwindende Größe ist. Es sey daher α_1 die größte Wurzel in dem Sinne, den wir früher angedeutet haben, und reell, so sind die Reihen:

$$\frac{1}{1-\alpha_2\frac{1}{\alpha_1}} = 1 + \alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + \alpha_2^2\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \alpha_2^3\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^3 + \ldots\ldots \alpha_2^p\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p$$

$$\frac{1}{1-\alpha_3\frac{1}{\alpha_1}} = 1 + \alpha_3\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + \alpha_3^2\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \alpha_3^3\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^3 + \ldots\ldots \alpha_3^p\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-\alpha_n\frac{1}{\alpha_1}} = 1 + \alpha_n\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + \alpha_n^2\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \alpha_n^3\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^3 + \ldots\ldots \alpha_n^p\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p$$

wenn auch unter den Größen α_2 bis α_n unmögliche Wurzeln vorkommen sollten, convergirende Reihen, und daher in dem Produkte derselben:

$$7)\quad 1 + \frac{1}{\alpha_1}\overset{1}{C}(2\ldots n) + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2\overset{2}{C}(2\ldots n) + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^3\overset{3}{C}(2\ldots n)\ \ldots\ldots \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p\overset{p}{C}(2\ldots n)$$

wo sich die Zeiger $2\ldots n$ auf die Wurzeln $\alpha_2\ldots\alpha_n$ beziehen, das Glied $\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p\overset{p}{C}(2\ldots n)$ bei hinreichender Größe von p eine verschwindende Größe. Multiplicirt man aber dieses Produkt noch mit dem Factor:

$$\frac{1}{1-\alpha_1\frac{1}{\alpha_1}} = 1 + \alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + \alpha_1^2\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \alpha_1^3\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^3 + \ldots\ldots \alpha_1^p\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p$$

so erhält man das Produkt:

$$8)\quad 1 + \frac{1}{\alpha_1}\overset{1}{C}(1\ldots n) + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2\overset{2}{C}(1\ldots n) + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^3\overset{3}{C}(1\ldots n) + \ldots\ldots \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p\overset{p}{C}(\ldots n)$$

in welcher Reihe sich die Glieder einer Grenze nähern, die die Summe der obigen Reihe (7) ist. Es sind daher die Glieder derselben endliche Werthe und der Quotient:

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^p\overset{p}{C}(2\ldots n)}{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{p-1}\overset{p-1}{C}(1\ldots n)} = \frac{1}{\alpha_1}\,\frac{\overset{p}{C}(2\ldots n)}{\overset{q-1}{C}(1\ldots n)}$$

stets noch eine verschwindende Größe, weshalb auch unter diesen Bedingungen der Quotient:

$$\frac{\overset{p}{C}(2_1\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$$

diese Eigenschaft besitzt. Dieses ist also der erste Fall, der mit Fouriers und auch Eulers Angaben ganz genau übereinstimmt.

II. Nehmen wir jetzt den zweiten speciellen Fall der allgemeinen Formel (4) und zerlegen den Divisor (6) in die beiden Factoren:

$$(1 + a_1x + a_2x^2)(1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots b_{n-2}x^{n-2})$$

so ist $q = 2$ und wir haben daher diesen Werth in die Formel 4 substituirt:

$$\overset{p}{C}(1\ldots.n) = - a_1\overset{p-1}{C}(1\ldots n) - a_2\overset{p-2}{C}(1\ldots.n) + \overset{p}{C}(3\ldots.n)$$

oder da in diesem Falle:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ und } a_2 = \alpha_1\alpha_2$$

$$\overset{p}{C}(1\ldots n) = (\alpha_1 + \alpha_2)\overset{p-1}{C}(1\ldots n) - \alpha_1\alpha_2\overset{p-2}{C}(1\ldots.n) + \overset{p}{C}(3\ldots n)$$

und hieraus folgt:

$$9)\quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2\overset{p-2}{C}(1\ldots n) + \overset{p}{C}(1\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)} - \frac{\overset{p}{C}(3\ldots.n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots.n)}$$

Hier wird auf dieselbe Weise wie vorhin bewiesen, daß $\frac{\overset{p}{C}(3\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$ eine verschwindende Größe ist, wenn α_1 größer ist als jede der Wurzeln α_3 bis α_n hin. Schreibt man jetzt die beiden Gleichungen:

$$10)\quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2\overset{p-2}{C}(1\ldots n) + \overset{p}{C}(1\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$$

$$11)\quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2\overset{p-1}{C}(1\ldots n) + \overset{p+1}{C}(1\ldots n)}{\overset{p}{C}(1\ldots n)}$$

und eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\alpha_1\alpha_2$, so erhält man:

$$12)\quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\overset{p}{C}\,.\,\overset{p-1}{C} - \overset{p+1}{C}\,.\,\overset{p-2}{C}}{\overset{p-1}{C}\,.\,\overset{p-1}{C} - \overset{p}{C}\,.\,\overset{p-2}{C}}\text{; eben so erhält man:}$$

$$13)\quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{\overset{p}{C}{}^2 - \overset{p+1}{C}\,.\,\overset{p-1}{C}}{\overset{p-1}{C}{}^2 - \overset{p}{C}\,.\,\overset{p-2}{C}}$$

wo der Kürze wegen bei den Größen $\overset{p}{C}(1\ldots n)$ die Zeiger der Elemente weggelassen sind, worauf sie sich beziehen, so daß man sie nur einfach als Coefficienten der Hauptreihe anzusehen braucht.

Die letztere Formel stimmt ganz genau mit der von Fourier gegebenen Regel überein, die erstere aber nicht, denn diese ist bei Fourier nach unserer Bezeichnungsart:

$$\alpha + \beta = \frac{\overset{p}{C}\,.\,\overset{p+3}{C} - \overset{p+1}{C}\,.\,\overset{p+2}{C}}{\overset{p-1}{C}\,.\,\overset{p+2}{C} - \overset{p}{C}\,.\,\overset{p+1}{C}}$$

aber diese Formel ist offenbar unrichtig, schon wegen der Ungleichheit der Dimensionen. Es liegt aber hier noch eine Unrichtigkeit verborgen; die obigen Gleichungen 10 und 11 sind nämlich identisch, so bald α_1 und α_2 nicht gleich groß, d. h. nicht wiederholte Wurzeln oder zusammengehörige unmögliche Wurzeln sind. Dieses lehrt nämlich auf den ersten Blick die Gleichung 9 in der Form nämlich, in der wir sie aufgestellt haben, indem wenn $\alpha_1 > \alpha_2$ die Wurzel α_2 mit α_3 und jeder folgenden Wurzel vertauscht werden kann, und immer wird der letzte Quotient eine verschwindende Größe bleiben. Sind aber α_1 und α_2 gleich groß, so kann man keine solche Vertauschung machen, indem sonst der letzte Quotient nicht verschwindet. Fourier sagt aber ausdrücklich, daß er hierdurch findet: la somme s + t des deux premières racines de la proposée: et comme la première est connue par une opération précédente, on connaît aussi la valeur t de la seconde racine. Dieses ist aber nicht wahr, denn wenn man die Wurzel s auf die vorhergehende Weise gefunden hat, so kann man s + t nicht mehr auf diesem Wege finden. Die Formeln 12 und 13 sind aber brauchbar, wenn α_1 und α_2 wiederholte oder zusammengehörige unmögliche Wurzeln sind, die daher auf diesem Wege gefunden werden können.

III. Zerlegt man ferner zum Behufe des dritten speciellen Falles der allgemeinen Formel (4) den Divisor (6) in die beiden Factoren:

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)(1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots b_{n-3}x^{n-3})$$

so ist $q = 3$ und man hat daher:

$$\overset{p}{C}(1\ldots n) = -a_1\overset{p-1}{C}(1\ldots n) - a_2\overset{p-2}{C}(1\ldots n) - a_3\overset{p-3}{C}(1\ldots n) + \overset{p}{C}(4\ldots n)$$

oder da in diesem Falle

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\ a_2 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \text{ und } a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

so hat man

$$\overset{p}{C} = (\alpha + \alpha_2 + \alpha_3)\overset{p-1}{C} - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\overset{p-2}{C} + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\overset{p-3}{C} + \overset{p}{C}(4\ldots n)$$

und hieraus folgt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \doteq \frac{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\overset{p-3}{C} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\overset{p-2}{C} + \overset{p}{C}}{\overset{p-1}{C}} - \frac{\overset{p}{C}(4\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$$

Hier ist ebenfalls $\frac{\overset{p}{C}(4\ldots n)}{\overset{p-1}{C}(1\ldots n)}$ eine verschwindende Größe, wenn α_1 größer als α_4 und jede der folgenden Wurzeln; ist aber α_1 auch größer als α_2 oder α_3, so können wir diese letztern Wurzeln mit jeder der folgenden vertauschen und stets wird der letzte Quotient eine verschwindende Größe bleiben; wir können daher alsdann keinen Gebrauch von dieser Beziehung machen. Sind aber α_1, α_2, α_3 gleiche große Wurzeln, wobei auch zwei von ihnen zusammengehörige unmögliche Wurzeln seyn können, dann ist keine solche Vertauschung gestattet, und man kann alsdann die drei Gleichungen aufstellen:

$$14)\quad a_1 = -\frac{a_3\overset{p-3}{C} + a_2\overset{p-2}{C} + \overset{p}{C}}{\overset{p-1}{C}}$$

$$a_2 = -\frac{a_3\overset{p-2}{C} + a^2\overset{p-1}{C} + \overset{p+1}{C}}{\overset{p}{C}}$$

$$a_3 = -\frac{a_3\overset{p-1}{C} + a_2\overset{p}{C} + \overset{p+2}{C}}{\overset{p+1}{C}}$$

woraus die drei Größen a_1, a_2 und a_3, und hieraus die drei Wurzeln α_1, α_2 und α_3 berechnet werden können. Bei vier und mehrern Wurzeln zeigt sich genau dasselbe. Will man daher durch diese Methode alle Wurzeln einer Gleichung kennen lernen, so greift man die Gleichung von zwei Seiten an, indem man durch die vorbeschriebene Methode die größten, und durch Umkehrung der Wurzeln die kleinsten Wurzeln sucht, wobei kein Fall denkbar ist, sowohl in Beziehung wiederholter reeller oder wiederholter unmöglicher Wurzeln, der nicht gelöst werden könnte. Durch Substitution ist man alsdann zuweilen im Stande, jede Wurzel zur kleinsten zu machen und auf diesem Wege zu finden. Geht dieses nicht an, so muß man die gefundenen Wurzeln aus der gegebenen Gleichung herausschaffen und dann wieder die größten und kleinsten Wurzeln suchen. Dieses Verfahren ist aber äußerst mühsam, und sehr häufig tritt namentlich bei sehr nahe liegenden Wurzeln der Fall ein, daß die recurrirenden Reihen sehr weit entwickelt werden müssen, bis man eine hinreichende Annäherung an den Werth der Wurzel erhält. Ferner hat man, um den Grad der Genauigkeit der Wurzel zu bestimmen, keine andere Regel, als durch Berechnung folgender Quotienten die Annäherung an eine Gränze zu beobachten, welches ebenfalls die Rechnung erschwert.

Inwiefern nun hierdurch Fouriers in seinem Exposé synoptique angedeutete Methode wieder hergestellt ist oder nicht, will ich der Beurtheilung des Lesers überlassen. Für die beiden ersten Wurzeln ist sie unzweifelhaft dieselbe, deren Unrichtigkeit aber offenbar ist. In Beziehung auf drey andere, in ihrer Größe verschiedene Wurzeln, könnte man sich übrigens leicht verleiten lassen, die Aufgabe im Sinne Fouriers durch die Gleichungen 14 für gelöst zu halten, welches doch nicht der Fall ist. Aus diesem Grunde habe ich auch die aus der allgemeinen Formel (4) hervorgehenden Gleichungen in Beziehung auf die 4, 5 ꝛc. größten Wurzeln nicht aufgestellt.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, zu untersuchen, inwiefern die recurrirenden Reihen, die Stern in seiner Theorie der Kettenbrüche entwickelt, geeignet sind, die Aufgabe zu lösen. Bei dieser Methode werden ebenfalls die Wurzeln der Gleichung potenzirt und zwar nach und nach. Hat nämlich die Gleichung die Form:

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots A_{m-1}x + A_m = 0$$

so berechnet man die Summen der Potenzen der Wurzeln $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_m$ nach den bekannten Formeln:

$$S_1(\alpha) = -A_1$$
$$S_2(\alpha) = -A_1S_1(\alpha) - 2A_2$$
$$S_3(\alpha) = -A_1S_2(\alpha) - A_2S_1(\alpha) - 3A_3 \text{ ꝛc.}$$

Diese Größen $S_1(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, $S_3(\alpha)$ ꝛc. bilden die erste recurrirende Reihe, in welcher der Quotient

$$\frac{S_{n+1}(\alpha)}{S_n(\alpha)} = \frac{\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1} + \alpha_3^{n+1} \dots \alpha_m^{n+1}}{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n \dots \alpha_m^n}$$

sich, wie wir schon früher gesehen haben, der Gränze α_1 nähert, wenn α_1 die größte Wurzel ist.

Aus dieser Summenreihe kann man wieder vermittelst der Formel

$$2S_n(\alpha_1\alpha_2) = [S_n(\alpha)]^2 - S_{2n}(\alpha)$$

eine zweite Reihe berechnen, deren Glieder die Summen der Potenzen aller Amben der Wurzeln enthält. Bildet man daher in dieser Reihe den Quotienten:

$$\frac{2S_n(\alpha_1\alpha_2)}{2S_{n-1}(\alpha_1\alpha_2)} = \frac{\alpha_1^n\alpha_2^n + \alpha_1^n\alpha_3^n + \alpha_1^n\alpha_4^n + \dots\dots}{\alpha_1^{n-1}\alpha_1^{n-1} + \alpha_1^{n-1}\alpha_3^{n-1} + \alpha_1^{n-1}\alpha_4^{n-1} + \dots\dots}$$

so nähert sich derselbe der Gränze $\alpha_1\alpha_2$, wenn α_1 und α_2 jede größer ist, als jede der folgenden Wurzeln.

Auf dieselbe Weise erhält man nach der Formel:

$$2.3S_n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = [S_n(\alpha)]^3 - 3\,S_n(\alpha)S_{2n}(\alpha) + 2S_{3n}(\alpha)$$

eine dritte Reihe, in der die aufeinander folgenden Glieder Quotienten bilden, welche sich der Gränze $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ nähern, sobald jede dieser Wurzeln größer ist als jede der folgenden u. s. f. Dieses ist schon völlig hinreichend, diese Methode ins Licht zu setzen, und zu zeigen, daß hierdurch die Aufgabe allerdings gelöst ist, aber auch zugleich, daß diese Methode höchst mühsam ist. Die reellen Wurzeln gehen aus den obigen Formeln unzweifelhaft hervor und für die unmöglichen erhält man aus denselben die Moduli. Hier dürfte es nun leichter zum Ziele führen, zu den Modulus den Winkel nach andern Methoden zu suchen, als noch, wie Stern vorschlägt, andere Reihen zu entwickeln, aus welchen man die Summen von zwei, drei und mehreren der größern Wurzeln erhält.

Untersucht man hier den nöthigen Aufwand von Arbeit, so zeigt sich, daß die Hauptreihe eben so mühsam zu berechnen ist, als die gewöhnliche recurrirende Reihe, indem die Recursionsscale fast die gleiche ist; zugleich aber, daß sie weiter entwickelt werden muß als diese, weil ihre Quotienten langsamer convergiren. Bei den folgenden Reihen ferner bedarf man zwar stets nur einiger aufeinanderfolgender Glieder, allein wenn diese noch keine hinreichende Convergenz gegeben, welches gerade bei der Gleichung vom 5ten Grade der Fall ist, welche Stern nach seiner Methode löst, so muß man noch nachfolgende entwickeln, und zu diesem Behufe die Hauptreihe oft sehr bedeutend erweitern, wobei man die Genauigkeit der gefundenen Wurzeln nur durch die Entwicklung nachfolgender Quotienten erfährt. Wenn daher mehrere Wurzeln ziemlich nahe liegen, wie dieses bei der obigen Gleichung der Fall ist, so ist diese Methode äußerst ermüdend; so findet Stern bei 56 Gliedern der Hauptreihe die naheliegenden Wurzeln nicht einmal in den ersten Decimalen genau, wie man in dem Folgenden sehen wird, wo dieselbe Gleichung nach der neuen Methode berechnet worden ist.

Die Auflösung der numerischen Gleichungen durch successives Quadriren der Wurzeln.

Bei unserer neuen Methode bringen wir das gleiche Princip in Anwendung, auf welches sich der Gebrauch der recurrirenden Reihen gründet, indem wir ebenfalls durch fortgesetztes Potenziren die kleinern Wurzeln gegen die größern zum Verschwinden bringen. Diese Potenzirung wird aber bei dieser Methode auf einem ganz andern Wege vollzogen, und zwar durch die längst schon bekannte, aber bis jetzt noch nicht zu diesem Zwecke gebrauchte Quadrirung der Wurzeln, wodurch man sicherer und schneller zu demselben Ziele gelangt, als bei irgend einer der bisher bekannten Methoden.

Hat man nämlich die Gleichung:

$$1)\quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots a_2x^2 + a_1x + a_0$$

und setzt man in derselben $x = \sqrt{x_1}$, so erhält man, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$a_n x_1^{\frac{n}{2}} + a_{n-2}x_1^{\frac{n-2}{2}} + \ldots\ldots a_2x_1 + a_0 = -\,[a_{n-1}x_1^{\frac{n-2}{2}} + a_{n-3}x_1^{\frac{n-4}{2}}\ldots\ldots a_1]\sqrt{x_1}$$

Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn n eine ungerade Zahl ist, nur wird alsdann $\sqrt{x_1}$ auf der andern Seite des Gleichheitszeichens als Factor stehen. In beiden Fällen erhält man aber, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zum Quadrat erhebt und hierauf alle Glieder geordnet wieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringt:

$$2)\quad a_n^2x_1^n + [-a_{n-1}^2 + 2a_na_{n-2}]x_1^{n-1} + [+a_{n-2}^2 - 2a_{n-1}a_{n-3} + 2a_na_{n-4}]x_1^{n-2} + \ldots.$$
$$\ldots\ldots(-1)^p[a_{n-p}^2 - 2a_{n-p+1}\,a_{n-p-1} + 2a_{n-p+2}\,a_{n-p-2}\ldots\ldots(-1)^q 2a_{n-p+q}\,a_{n-p-q}\ldots.]x^{n-p}$$
$$\ldots\ldots(-1)^{n-2}[a_2^2 - 2a_3a_1 + 2a_4a_0]x_1^2 + (-1)^{n-1}[a_1^2 - 2a_2a_0]x + (-1)^n a_0^n = 0,$$

wobei in der Entwicklung des allgemeinen Gliedes dadurch Gränzen gesetzt sind, daß die Zeiger nicht unter 0 und nicht über n hinausgehen. Wir wollen jetzt diese Formel für die gewöhnlich vorkommenden Fälle specialisiren und hierbei den Coefficienten $a_n = 1$ setzen:

$n = 3$, $x_1^3 + [-a_2^2 + 2a_1]x_1^2 + [a_1^2 - 2a_2a_0]x_1 - a_0^2 = 0$

$n = 4$, $x_1^4 + [-a_3^2 + 2a_2]x_1^3 + [a_2^2 - 2a_3a_1 + 2a_0]x_1^2 + [-a_1^2 + 2a_2a_0]x_1 + a_0^2 = 0$

$n = 5$, $x_1^5 + [-a_4^2 + 2a_3]x_1^4 + [a_3^2 - 2a_4a_2 + 2a_1]x_1^3 + [-a_2^2 + 2a_3a_1 - 2a_4a_0]x_1^2 + [a_1^2 - 2a_2a_0]x - a_0^2 = 0$

$n = 6$, $x_1^6 + [-a_5^2 + 2a_4]x_1^5 + [a_4^2 - 2a_5a_3 + 2a_2]x_1^4 + [-a_3^2 + 2a_4a_2 - 2a_5a_1 + 2a_0]x_1^3$
$+ [+a_2^2 - 2a_3a_1 + 2a_4a_0]x_1^2 + [-a_1^2 + 2a_2a_0]x_1 + a_0^2 = 0$

u. s. w., woraus man sieht, daß das Bildungsgesetz dieser neuen Gleichung sehr einfach ist, und daß sie, wie schon längst bekannt, ebenfalls vom n^{ten} Grade ist. Da wir jedoch nur deswegen die obige Bezeichnung der Coefficienten eingeführt haben, um dieses Gesetz besser übersehen zu können, so wollen wir zu unserer früheren Bezeichnung zurückkehren und die gegebene Gleichung von der Form:

$$3)\quad x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0$$

annehmen, entwickelt man aus dieser Gleichung nach der obigen Regel eine neue Gleichung, so erhält diese die Form:

$$x_1^n + B_1x_1^{n-1} + B_2x_1^{n-2} + \ldots\ldots B_{n-2}x_1^2 + B_{n-1}x_1 + B_n = 0$$

verfährt man mit dieser Gleichung auf dieselbe Weise, so erhält man die Gleichung:

$$x_2^n + C_1x_2^{n-1} + C_2x_2^{n-2} + \ldots\ldots C_{n-2}x_2^2 + C_{n-1}x_2 + C_n = 0$$

und allgemein erhält nach m Operationen der Ausdruck auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die Form:

$$x_m^n + P_1x_m^{n-1} + P_2x_m^{n-2} + \ldots\ldots P_{n-2}x_m^2 + P_{n-1}x_m + P_n$$

Durch dieses fortgesetzte Quadriren der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung steigt aber der Grad der Potenz sehr bald in die Höhe und wir wollen jetzt untersuchen, was der Erfolg dieser Quadrirung ist. Die Coefficienten der gegebenen Gleichung (3) sind bekanntlich Combinationsformen ohne Wiederholbarkeit der Elemente aus den n Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, der Gleichung, und diese können wir daher, wenn wir diese Combinationsformen mit C bezeichnen, auf folgende Weise umgestalten:

$$A_1 = -\overset{1}{C}(1\ldots n) = -\alpha_1 - \overset{2}{C}(2\ldots n),$$

$$A_2 = +\overset{2}{C}(1\ldots n) = \alpha_1\overset{1}{C}(2\ldots n) + \overset{2}{C}(2\ldots n)$$

$$A_3 = -\overset{3}{C}(1\ldots n) = -\alpha_1\overset{2}{C}(2\ldots n) - \overset{3}{C}(2\ldots n)$$

$$A_p = (-1)^p\overset{p-1}{C}(1\ldots n) = (-1)^p(\alpha_1\overset{p-1}{C}(2\ldots n) + \overset{p}{C}(2\ldots n))$$

Bei fortgesetzter Quadrirung der Wurzeln und wenn α_1 reell und größer als jede der andern Wurzeln ist, wobei nur der absolute Zahlwerth, und bei unmöglichen Wurzeln der Zahlwerth des Modulus in Betrachtung kömmt, erlangen je die ersten der beiden Gruppen von Combinationsformen, in welche wir die Coefficienten zerlegt haben, einen überwiegenden Werth über die letzten, so daß, wenn wir die Coefficienten numerisch berechnen, auf die ersten q Ziffern derselben bei hinreichender Anzahl von solchen Operationen, die zweiten Gruppen keinen Einfluß mehr haben, und man hat daher alsdann, wenn $r = 2^m$ der Exponent ist, den die Wurzeln nach m Operationen erhalten den Ausdruck:

$$4)\quad x^n - \alpha_1^r x^{n-1} + \alpha_1^r\overset{1}{C}(2\ldots n)x^{n-2} - \alpha_1^r\overset{2}{C}(2\ldots n)x^{n-3}\ldots\ldots(-1)^{n-1}\alpha_1^r\overset{n-2}{C}(2\ldots n)x + (-1)^n\alpha^r\overset{n-1}{C}(2\ldots n)$$

wo sich die Combinationsformen natürlich auf die Elemente $\alpha_2^r, \alpha_3^r \ldots \alpha_n^r$ beziehen. Ist unter diesen Wurzeln α_2 reell und größer als jede der andern, so können wir in Beziehung auf die

Größen $\overset{1}{C}(2\ldots n)$, $\overset{2}{C}(2\ldots n) \ldots \overset{n-1}{C}(2\ldots n)$ ganz die vorigen Schlüsse ziehen, und wir haben daher die Form:

$$x^n - \alpha_1^r x^{n-1} + \alpha_1^r \alpha_1^r x^{n-2} - \alpha_1^r \alpha_2^r \overset{1}{C}(3\ldots n) x^{n-} + \ldots (-1)^{n-1} \alpha_1^r \alpha_2^r \overset{n-3}{C}(3\ldots n) x + (-1)^n \alpha_1^r \alpha_2^r \overset{n-2}{C}(3\ldots n)$$

Sind alle Wurzeln reell und von verschiedener Größe, so erhält man endlich den Ausdruck:

$$5) \quad x^n - \alpha_1^r x^{n-1} + \alpha_1^r \alpha_2^r x^{n-2} - \alpha_1^r \alpha_2^r \alpha_3^r x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots (-1)^n \alpha_1^r \alpha_2^r \alpha_3^r \ldots\ldots \alpha_n^r$$

Bei der numerischen Berechnung muß man zuerst bestimmen, wie viele Ziffern von der Wurzel gefunden werden sollen, alsdann werden die Coefficienten auch nicht über diese Gränze hinaus entwickelt oder höchstens um eine Stelle weiter, damit man die letzte Ziffer der Wurzel desto genauer erhält. Alles, was nicht innerhalb des Bereiches dieser Ziffern fällt, wird weggeworfen, und man muß daher genau den Rang der letzten Ziffer der Coefficienten angeben, welches, wenn die Coefficienten sehr große Zahlen sind, zweckmäßiger durch eine Zahl, als durch angehängte Nullen geschieht. Bleibt man bei dieser Berechnung innerhalb des Bereiches der logarithmischen Tafeln, welches meistens der Fall ist, so machen sich die richtigen Abkürzungen von selbst, und der Rang der Coefficienten wird durch die Kennziffern der Logarithmen angegeben. In dem Verlaufe dieser Rechnung werden die nachfolgenden Quadrirungen der Wurzeln immer leichter, weil sich bei der obigen Annahme über die Beschaffenheit der Wurzeln die Coefficienten der folgenden Gleichung immer mehr den Quadraten der Coefficienten der nächstvorhergehenden Gleichung näheren, und wachsen sie endlich nur quadratisch, welcher Fall nothwendig eintreten muß, so hat die Größe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die Form wie N°. 5 erlangt.

Zieht man alsdann aus jedem Coefficienten die r^{te} Wurzel und dividirt jeden nachfolgenden durch den nächstvorhergehenden, so erhält man die absoluten Zahlwerthe der Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Man nimmt natürlich bei diesen Wurzelausziehungen nur die reellen Wurzeln, und bestimmt die Zeichen derselben durch einfache Substitution der nächsten Gränzwerthe.

So erhält man z. B. aus der folgenden Gleichung eine Reihe anderer Gleichungen, in der die Wurzeln zur 2ten, 4ten, 8ten u. s. w. Potenz erhoben sind:

1te Potenz: $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48 = 0$
2te „ $x^4 - 78x^3 + 945x^2 - 3172x + 2304 = 0$

Macht man jetzt Gebrauch von den Logarithmen und schreibt man anstatt des Coefficienten deren briggische Logarithmen, so erhält man:

4te Potenz: $x^4 - 3{,}6226284x^3 + 5{,}6050906x^2 - 6{,}7564097x + 6{,}7249650$
8te „ $x^4 - 7{,}2248964x^3 + 11{,}0583835x^2 - 13{,}4516890x + 13{,}4499300$
16te „ $x^4 - 14{,}4494399x^3 + 22{,}0840414x^2 - 26{,}8998664x + 26{,}8998600$
32te „ $x^4 - 28{,}8988797x^3 + 44{,}1667624x^2 - 53{,}7997195 + 53{,}7997200$

Jetzt wachsen bei folgenden Quadrirungen der Wurzeln alle Coefficienten quadratisch, und man hat daher

$$\log \alpha_1 = \frac{28,8988797}{32} = 0,9030900 = \log 8$$

$$\log \alpha_2 = \frac{44,1667624 - 28,8988797}{32} = 0,4771213 = \log 3$$

$$\log \alpha_3 = \frac{53,7997195 - 44,1667624}{32} = 0,3010299 = \log 2$$

$$\log \alpha_4 = \frac{53,7997200 - 53,7997195}{32} = 0,0000000 = \log 1$$

Man überzeugt sich alsdann sehr leicht, daß die Wurzeln sämmtlich positiv und daß daher $\alpha_1 = +8$, $\alpha_2 = +3$, $\alpha_3 = +2$ und $\alpha_4 = 1$.

Die Berechnung irrationaler Wurzeln macht offenbar keine größeren Schwierigkeiten und man erhält hierbei ebenfalls 7 zuverlässige Ziffern derselben, denn wenn auch die letzten Ziffern der Coefficienten immer unsicherer werden, so geht diese Unsicherheit bei der Wurzelausziehung wieder verloren.

Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, wo die beiden Wurzeln α_1 und α_2 beide gleich groß sind, indem sie entweder wiederholte Wurzeln, die auch entgegengesetzte Zeichen haben können, oder zusammengehörige unmögliche Wurzeln sind. Alsdann hat man in der vorgelegten Gleichung

$$A_1 = -\overset{1}{C}(1\ldots n) = -(\alpha_1 + \alpha_2) - \overset{1}{C}(3\ldots n)$$

$$A_2 = +\overset{2}{C}(1\ldots n) = \alpha_1\alpha_2 + (\alpha + \alpha_2)\overset{1}{C}(3\ldots n) + \overset{2}{C}(3\ldots n)$$

$$A_3 = -\overset{3}{C}(1\ldots n) = -\alpha_1\alpha_2\overset{1}{C}(3\ldots n) - (\alpha_1 + \alpha_2)\overset{2}{C}(3\ldots n) - \overset{3}{C}(3\ldots n)$$

$$A_4 = +\overset{4}{C}(1\ldots n) = +\alpha_1\alpha_2\overset{2}{C}(\ldots n) + (\alpha_1 + \alpha_2)\overset{3}{C}(3\ldots n) + \overset{4}{C}(3\ldots n)$$

$$\vdots$$

$$A_p = (-1)^p\overset{p}{C}(1\ldots n) = (-1^p[\alpha_1\alpha_2\overset{p-2}{C}(3\ldots n) + (\alpha + \alpha_2)\overset{p-1}{C}(3\ldots n) + \overset{p}{C}(3\ldots n)]$$

Bei fortgesetzter Quadrirung müssen auch hier je alle folgenden Gruppen, in welche wir die Combinationsclassen zerlegt haben, gegen die erste verschwinden und wir erhalten daher, nach m Operationen den Ausdruck:

$$x^n - (\alpha_1^r + \alpha_2^r)x^{n-1} + \alpha_1^r\alpha_2^r x^{n-3} - \alpha_1^r\alpha_2^r\overset{1}{C}(3\ldots n)x^{n-3} + \alpha_1^r\alpha_2^r\overset{2}{C}(3\ldots n)x^{n-4} \ldots\ldots (-1)^n\alpha_1^r\alpha_2^r\overset{n-2}{C}(3\ldots n),$$

wobei noch zu bemerken ist, daß wenn $(\alpha_1^r + \alpha_2^r)\overset{1}{C}(3\ldots n)$ gegen $\alpha_1^r\alpha_1^r$ nicht in Betrachtung kömmt, auch nothwendig $\overset{1}{C}(3\ldots n)$ neben $\alpha_1^r + \alpha_2^r$ verschwunden ist.

Sind alsdann die beiden Wurzeln α_1 und α_2 wiederholte Wurzeln, so ist der zweite Coefficient α_1^{2r} und er wächst daher bei hinreichender Größe von r quadratisch, welches das Zeichen ist, daß in Beziehung auf diese Wurzeln die Quadrirung nicht weiter fortgesetzt zu werden braucht. Der erste Coefficient ist aber in diesem Falle $2\alpha_1^r$ und es wächst daher die Hälfte desselben quadratisch, welches das Zeichen für wiederholte Wurzeln ist. Hieraus kann natürlich α_1 wie vorhin gefunden werden, worauf man noch die Zeichen von α_1 zu bestimmen hat. Wächst aber der erste Coefficient nicht auf diese Weise, so schließen wir auf zwei zusammengehörige unmögliche Wurzeln von der Form:

$$\alpha_1 = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$
$$\alpha_2 = \varrho(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$$

und es ist: $\alpha_1^r\alpha_2^r = \varrho^{2r}$ und $\alpha_1^r + \alpha_2^r = 2\varrho^r\cos r\varphi$. Man findet daher durch den zweiten Coefficienten den Modulus der beiden unmöglichen Wurzeln, wozu wir den Winkel nach einer erst später zu entwickelnden Methode suchen. Ist ferner die dritte Wurzel α_3 reell und größer als jede der folgenden, so machen wir in Beziehung auf die Größen $\overset{1}{C}(3\ldots n)$, $\overset{2}{C}(3\ldots n)\ldots\overset{n-2}{C}(3\ldots n)$, wo sich die Elementenzeiger auf die Größen α_3^r, $\alpha_4^r\ldots\alpha_n^r$ beziehen, ganz die gleichen Schlüsse, die wir vorhin in Beziehung auf α_1 und die Größen $\overset{1}{C}(1\ldots n)$, $\overset{2}{C}(1\ldots n)\ldots\overset{n}{C}(1\ldots n)$ gemacht haben, und sind α_3 und α_4 zwei wiederholte oder zusammengehörige unmögliche Wurzeln, so gilt von diesen dasselbe, was wir so eben von α_1 und α_2 gesagt haben, und so fährt man fort, immer dieselben Schlüsse wieder anzuwenden, bis man die Moduli aller unmöglichen Wurzeln und alle reellen Wurzeln erhalten hat.

Hat man z. B. die Gleichung:

$$x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0$$

so erhält man durch die successiven Quadrirungen der Wurzeln:

2^{te} Potenz: $x^4 + x^3 - x^2 - 101x + 100 = 0$

4^{te} „ $x^4 - 3x^3 + 403x^2 - 10401x + 10000 = 0$

Bei den folgenden sind die Coefficienten durch die briggischen Logarithmen derselben gegeben:

8^{te} Potenz: $x^4 + 2{,}9014583x^3 + 5{,}0791921x^2 - 8{,}0005243x + 8{,}0000000$

16^{te} „ $x^4 - 5{,}5968202x^3 + 11{,}2410312x^2 - 16{,}0000076 + 16{,}0000000$

32^{te} „ $x^4 + 11{,}2837560x^3 + 22{,}3510053x^2 - 32{,}0000000x + 32{,}0000000$

64^{te} „ $x^4 + 21{,}8996504x^3 + 44{,}7339617x^2 - 64{,}0000000 + 64{,}0000000$

128^{te} „ $x^4 + 45{,}0089883x^3 + 89{,}4681581x^1 - 128{,}0000000x + 128{,}0000000$

Von jetzt an wächst der zweite Coefficient quadratisch und man erhält daher:

$$\log\varrho^2 = \frac{89{,}4681581}{128} = 0{,}6989700 = \log 5$$

Da aber auch die folgenden Coefficienten quadratisch wachsen, so hat man:

$$\log\alpha_3 = \frac{128 - 89{,}4681581}{128} = 0{,}3010300 = \log 2$$

$$\log\alpha_4 = \frac{128 - 128}{128} = 0{,}0000000 = \log 1$$

Nach bekannten Regeln findet man ferner $\alpha_3 = +2$ und $\alpha_4 = +1$. Die weitere Bestimmung der unmöglichen Wurzeln hat in diesem Falle keine Schwierigkeit, denn man hat die bekannte Beziehung, wenn $\varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ und $\varrho(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{1})$ diese Wurzeln sind:

$2\varrho\cos\varphi + 2 + 1 = +5$. Hieraus folgt:

$\varrho\cos\varphi = 1$ und dieses giebt

$$\varrho \sin \varphi = \sqrt{\varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{5-1} = \pm 2. \text{ Es ist daher:}$$

$$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{-1}$$

$$\alpha_2 = 1 - 2\sqrt{-1}$$

Berechnen wir ferner nach derselben Methode die Wurzeln der Gleichung:

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

welche auch Stern nach seiner Methode, aber nicht mit hinreichender Annäherung gelöst hat, so erhalten wir bei den Quadrirungen nach und nach:

2te Potenz: $x^5 + x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 0x_1 - 1$

4te „ $x^5 + 17x^4 + 77x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

8te „ $x^5 - 135x^4 + 6005x^3 + 646x^1 + 12x - 1$

16te „ $x^5 - 6215x^4 + 36234469x^3 - 273466x^2 + 1436x - 1$

In den folgenden Ausdrücken stehen statt der Coefficienten deren Logarithmen:

32te Potenz: $x^5 + 7{,}5294653x^4 + 15{,}1182428x^3 + 10{,}4665969x^2 + 6{,}1804397x - 0{,}0000000$

64te „ $+ 21{,}4943216x^2 + 12{,}3718592x - 0{,}0000000$

128te „ $+ 24{,}7442072x - 0{,}0000000$

Da hier der zweite Coefficient schon bei der 32ten Potenz quadratisch wächst und der erste von einer Quadrirung zur andern sein Zeichen wechselt, so sind die beiden größten Wurzeln unmöglich. Dasselbe gilt auch von den beiden nächsten Wurzeln, und die fünfte Wurzel endlich ist reell. Sind nun die Moduli der zwei Wurzelpaare ϱ_1 und ϱ_2, so hat man aus dem Obigen:

$\log \varrho_1^{64} = 15{,}1182428$ und daher: $\log \varrho_1 = 0{,}2362225$

$\log (\varrho_1 \varrho_2)^{256} = 24{,}7442072$ $\quad\quad \log \varrho_2 = 0{,}8604346 - 1$

$\log (\varrho_1^2 \varrho_2^2 \alpha_5) = 0{,}0000000$ $\quad\quad \log \alpha_5 = 0{,}8066858 - 1$

Hieraus folgt zunächst $\alpha_5 = 0{,}6407460$ und da bei den Substitutionen von 0 und + 1 in die gegebene Gleichung entgegengesetzte Zeichen im Resultate erscheinen, so ist diese Wurzel positiv. Zu den beiden Werthen von ϱ_1 und ϱ_2 findet man die gehörigen Winkel vermittelst der bekannten Beziehungen:

$$2\varrho_1 \cos \varphi + 2\varrho_2 \cos \varphi_2 + \alpha_5 = -1$$

$$\frac{2\cos\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{2\cos\varphi_2}{\varrho_2} + \frac{1}{\alpha_5} = +2$$

Hieraus folgt $\varphi_1 = 131^0\ 19'\ 3{,}05''$ und $\varphi_2 = 64^0\ 4'\ 28{,}5''$ und es sind daher die beiden Wurzelpaare:

$$-1{,}137414 \pm 1{,}293894\sqrt{-1}$$

$$+0{,}317041 \pm 0{,}6521840\sqrt{-1}$$

Die gegebene Gleichung zerfällt daher in die Factoren:

$$x^2 + 2{,}274828x + 2{,}967872 = 0$$

$$x^2 - 0{,}634082x + 0{,}5258586 = 0$$

$$x - 0{,}6407460 = 0$$

Berechnet man von dem Produkte dieser Factoren den Coefficienten, der zu x^3 gehört, so erhält man:

		$-\ 0{,}640746$
$-\ 0{,}634082$	$+\ 2{,}274828 - 0{,}634082 =$	$+\ 1{,}640746$
$+\ 2{,}274828$		640746
1 268164		384448
126816		25630
44386		448
2536		26
507		4
13		$-\ 1{,}051302$
5		
$-\ 1{,}442427$	$+\ 2{,}967872$	
$-\ 1{,}051302$	$+\ 0{,}525859$	
$-\ 2{,}493729$	$+\ 3{,}493731$	
	$-\ 2{,}493729$	
	$+\ 1{,}000002$	

welcher Coefficient erst in der 6ten Decimale von dem zweiten Coefficienten der gegebenen Gleichung verschieden ist. Stern hat nur das erste Wurzelpaar richtig, der Modulus der beiden folgenden und die fünfte reelle Wurzel haben aber eine zu geringe Differenz, als daß sie bei seiner Methode so bald zum Vorschein kommen konnten. Ihre Trennung erfolgt hier rücksichtlich der ersten 7 Ziffern erst bei der 128ten Potenz.

Die allgemeine Untersuchung, zu der wir jetzt wieder zurückkehren wollen, hat uns vorhin gezeigt, daß wenn in der Reihe der nach ihrer Größe geordneten Wurzeln nirgends mehr als zwei gleich große Wurzeln unmittelbar auf einander folgen, sowohl die reellen Wurzeln als auch die Moduli der unmöglichen Wurzeln durch die successiven Quadrirungen der Wurzeln so genau, als man will, gefunden werden können. Es bleibt daher bei der obigen Voraussetzung nur noch übrig, eine allgemeine Methode anzugeben, nach welcher zu jedem Modulus der zugehörige Winkel oder auch die beiden Theile der unmöglichen Wurzeln gefunden werden können.

Enthält die allgemeine Gleichung:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-2} x + A_n = 0$$

nur ein Paar unmöglicher Wurzeln und bezeichnet man die Summe der möglichen Wurzeln mit S, so haben wir schon gesehen, daß man vermittelst der bekannten Beziehung:

$$2\varrho_1 \cos\varphi_1 + S = -A_1$$

für den Modulus ϱ_1 den zugehörigen Winkel φ_1 und hieraus die beiden Theile dieses Wurzelpaares sehr leicht finden kann. Will oder kann man sich der trigonometrischen Tafeln nicht bedienen, so kann man auch aus der obigen Gleichung $\varrho_1 \cos\varphi_1$ berechnen, welches der reelle Theil der unmöglichen Wurzel ist, und dann $\sqrt{\varrho_1^2 - \varrho_1^2 \cos\varphi_1}\ \sqrt{-1}$ berechnen, welches den unmöglichen Theil derselben giebt.

Hat ferner die Gleichung zwei Paar solcher Wurzeln, deren Moduli ϱ_1 und ϱ_2 sind, und bezeichnet man die Summe der umgekehrten reellen Wurzeln mit S_1, so hat man die bekannten Gleichungen:

$$2\varrho_1 \cos\varphi + 2\varrho_2 \cos\varphi_2 + S = -A_1$$

$$\frac{2\cos\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{2\cos\varphi_2}{\varrho_2} + S_1 = -\frac{A_{n-1}}{A_n}$$

aus welchen ebenfalls entweder mit oder ohne Hülfe der trigonometrischen Tafeln die beiden Theile jedes Wurzelpaares gefunden werden können.

Hat aber die Gleichung mehr als vier unmögliche Wurzeln, so können die beiden Theile jeder derselben auf folgende Weise berechnet werden. Wir wollen annehmen, daß sie allgemein q Paar unmöglicher Wurzeln besitze, so finden wir durch die Quadrirung die q Moduli ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_3 \ldots . \varrho_q$, wo jeder folgende kleiner ist als der vorhergehende, so daß allgemein $\varrho_p^2 > \varrho_{p+1}^2$.

Fassen wir jetzt die beiden Wurzelpaare $a_p \pm b_p\sqrt{-1}$ und $a_{p+1} \pm b_{p+1}\sqrt{1}$, deren Moduli ϱ_p und ϱ_{p+1} sind, ins Auge, und fügen wir zu jeder Wurzel die Größe $\frac{u}{m}$, wo $u = \varrho_p^2 - \varrho_{p+1}^2$ und m eine noch zu bestimmende Zahl ist, so verwandeln sich diese beiden Wurzelpaare in folgende:

$$a_p + \frac{u}{m} \pm b_p\sqrt{-1} \text{ und } a_{p+1} + \frac{u}{m} \pm b_{p+1}\sqrt{-1}$$

und die Moduli dieser neuen Wurzeln sind:

$$r_p^2 = a_p^2 + \frac{2u}{m}a_p + \frac{u^2}{m_2} + b_p^2 = \varrho_p^2 + \frac{2u}{m}a_p + \frac{u^2}{m^2}$$

$$r_{p+1}^2 = a_{p+1}^2 + \frac{2u}{m}a_{p+1} + \frac{u^2}{m^2} + b_{p+1}^2 = \varrho_{p+1}^2 + \frac{2u}{m}a_{p+1} + \frac{u^2}{m^2}$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie groß m angenommen werden muß, damit $r_p^2 > r_{p+1}^2$, und setzen daher:

$$\varrho_p^2 + \frac{2u}{m}a_p + \frac{u^2}{m^2} > \varrho_{p+1}^2 + \frac{2u}{m}a_{p+1} + \frac{u^2}{m^2}$$

woraus folgt:

$$m > 2(a_{p+1} - a_p)$$

Es ist aber $\varrho_p > a_p$ und $\varrho_{p+1} > a_{p+1}$ und daher $2(\varrho_{p+1} + \varrho_p) > 2(a_{p+1} - a_p)$ und es wird daher der obige Zweck erreicht, wenn man $m = 2(\varrho_{p+1} + \varrho_p)$ setzt. Die Zahl, welche zu den unmöglichen Wurzeln hinzugefügt, die Rangfolge der Moduli ϱ_p und ϱ_{p+1} nicht verändert, ist daher: $\frac{\varrho_p^2 - \varrho_{p+1}^2}{2(\varrho_p + \varrho_{p+1})} = \frac{\varrho_p - \varrho_{p+1}}{2}$.

Berechnet man jetzt die Zahl $k = \frac{\varrho_p - \varrho_{p+1}}{2}$ oder $k = \frac{\varrho_p^2 - \varrho_{p+1}^2}{4}$, welche unter allen, die die Moduli $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots\ldots \varrho_q$ geben, die kleinste ist, und fügt diese zu jeder Wurzel hinzu, so wird dadurch die Rangfolge aller unmöglichen Wurzeln nicht gestört. Diese Veränderung der Wurzeln wird aber dadurch erreicht, daß man in die gegebene Gleichung für x den Werth $z - k$ substituirt, wodurch man die Gleichung:

$$z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \ldots\ldots B_{n-1} z + B_n = 0$$

erhält. Durch die Quadrirung der Wurzeln erhält man aus dieser Gleichung die Moduli r_1, $r_2, r_3 \ldots\ldots r_p \ldots\ldots r_q$ in derselben Ordnung, in der die correspondirenden Moduli $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots\ldots \varrho_p \ldots \varrho_q$ aus der vorigen Gleichung hervorgegangen sind. Man hat daher:

$$\varrho_p^2 = a_p^2 + b_p^2 \text{ und}$$
$$r_p^2 = a_p^2 + 2a_p k + k^2 + b_p^2 \text{ und hieraus folgt:}$$
$$a_p = \frac{r_p^2 - \varrho_p^2 - k^2}{2k}$$

Hat man nach dieser Formel a_p berechnet, so findet man b_p durch die Formel:

$$b_p = \sqrt{\varrho_p^2 - a_p^2}$$

Es versteht sich wohl von selbst, daß man für k nicht immer den gefundenen Werth, sondern den nächst kleinern rationalen Werth substituirt und k nie größer als 1 anzunehmen braucht.

Hat man z. B. die Gleichung:

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

so erhält man durch die Quadrirung der Wurzeln nach und nach die Ausdrücke:

2te Potenz:	$x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1$
4te „	$x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1$
8te „	$x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1$

In dem Folgenden stehen anstatt der Coefficienten deren Logarithmen:

16te Pot.:	$x^6 + 3{,}2382971x^5 + 5{,}9003048x^4 + 7{,}5671654x^3 + 9{,}0095836x^2 + 4{,}8057658x + 0{,}0000000$
32te „	$x^6 - 6{,}1481672x^5 + 11{,}7042359x^4 + 14{,}4195610x^3 - 18{,}0191653x^2 - 9{,}3103897x + 0{,}0000000$
64te „	$x^6 - 11{,}9851090x^5 + 23{,}4097269x^4 + 29{,}9951188x^3 + 36{,}038306x^2$
128te „	$46{,}8194664x^4$

Man sieht sogleich, daß diese Gleichung 6 unmögliche Wurzeln hat und für die Moduli ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 erhält man die Beziehungen:

$$\log \varrho_1^{256} = 46{,}8194664 \quad \text{woraus folgt} \quad \log \varrho_1^2 = 0{,}3657771$$
$$\log (\varrho_1 \varrho_2)^{128} = 36{,}0383306 \qquad \log \varrho_2^2 = 0{,}1973218$$
$$\log (\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3)^2 = 0{,}0000000 \qquad \log \varrho_3^2 = 0{,}4369011 - 1$$

Hieraus folgt $\varrho_1^2 = 2{,}3215448$, $\varrho_2^2 = 1{,}5751498$, $\varrho_3^2 = 0{,}2734646$

4 *

Eine oberflächliche Schätzung zeigt uns, daß hier $k = 0,1$ gesetzt werden kann; substituirt man daher in die gegebene Gleichung für x den Werth $z - 0,1$, so erhält man die Gleichung:

$$z^6 - 1,6z^5 + 2,65z^4 - 3,92z^3 + 3,0315z^2 + 0,50114z + 0,923211 = 0$$

Durch Quadrirung der Wurzeln erhält man hieraus:

2te Pot.: $x^6 + 2,74z^5 + 0,5415z^4 + 4,15158z^3 + 18,044300z^2 + 5,345986z + 0,85231855$

Schreibt man jetzt anstatt des Coefficienten deren Logarithmen, so erhält man:

4te Pot.: $z^6 - 0,8078461z^5 + 1,1326171z^4 - 1,4034208z^3 + 2,4487829z^2 + 0,3280267z + 0,8612040 - 1$

8te „ $z^6 - 1,1503393z^5 + 2,6242469z^4 + 3,8460997z^3 + 4,8982662z^2 + 2,6061726z + 0,7224080 - 1$

16te „ $z^6 + 2,8076605z^5 + 5,7273510z^4 + 7,2404349z^3 + 9,7961391z^2 - 4,9006718z$

32te „ $z^6 + 5,8163275z^5 + 11,4394458z^4 + 15,8043751z^3 + 19,5922782z^2$

64te „ $z^6 + 11,0825985z^5 + 22,8286066z^4 - 31,2811548z^3$

128te „ $+ 45,6576549z^4$

Hieraus findet man:

$\log r_1^{256} = 45,6576549$ und es ist daher: $\log r_1^2 = 0,3567004$

$\log (r_1 r_2)^{32} = 9,7961391$ $\quad \log r_2^2 = 0,2555583$

$\log (r_1 r_2 r_3)^8 = 0,8612040 - 1$ $\quad \log r_3^2 = 0,3530423 - 1$

Man hat daher:

$$a_1 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2 - 0,01}{0,2} = -0,2900815 \text{ und hieraus } b_1 = 1,495755$$

$$a_2 = \frac{r_2^2 - \varrho_2^2 - 0,01}{0,2} = +1,0801755 \quad „ \quad „ \quad b_2 = 0,639039$$

$$a_3 = \frac{r_3^2 - \varrho_3^2 - 0,01}{0,2} = -0,2900935 \quad „ \quad „ \quad b_3 = 0,435098$$

Die drei Paare unmöglicher Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind also:

$$-0,2900815 \pm 1,495755\sqrt{-1}$$
$$+1,0801755 \pm 0,639039\sqrt{-1}$$
$$-0,2900935 \pm 0,435098\sqrt{-1}$$

Da die Summe dieser Wurzeln $= 1,000001$ ist und erst in der 6ten Decimale von dem wahren Werthe abweicht, so zeigt dieses, daß die Wurzeln ebenfalls bis auf die 6te Decimale genau sind. Durch die Potenzirung der Wurzeln der vorgelegten Gleichung findet man auch aus den 1ten, 3ten und 5ten Coefficienten die Werthe von $\cos 128\varphi_1$, $\cos 64\varphi_2$ und $\cos 16\varphi_3$, und diese können daher dazu dienen, theils die Richtigkeit der Rechnung zu controliren und theils die Werthe von a_1, a_2 und a_3 genauer zu bestimmen. Denn man hat z. B.

$$\log \cos 128\varphi_1 = 9,9124518 \text{ und daher } 128\varphi_1 = 2n\pi \pm 35^0\ 10'\ 17,2''$$

Hieraus folgt:

$$\varphi_1 = \frac{2n\pi \pm 35^0\ 10'\ 17{,}2''}{128}$$

Aus a_1 und ϱ_1 findet man ebenfalls einen Werth von φ_1 und aus diesem folgt:

$$\varphi_1 = \frac{72\pi - 35^0\ 10'\ 17{,}2''}{128} = 100^0\ 58'\ 30{,}8''$$

Erhält man hierbei für n keine ganze Zahl, so ist ein Rechnungsfehler vorhanden. Ist jedoch die Rechnung richtig, aber der Divisor 2k in den Quotienten $a_1 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2 - k^2}{2k}$ eine sehr kleine Zahl, so kann man vermittelst des gefundenen Werthes von φ_1 die letzten Decimalen von a_1 genauer bestimmen u. s. f.

Es ist übrigens keineswegs erforderlich, bei der Umformung der Gleichung durch die Substitution $x = z - k$ für k einen Werth auszumitteln, durch welchen die Aufeinanderfolge der unmöglichen Wurzeln nicht gestört wird, und man kann daher in allen Fällen $k = 1$ setzen. Denn hat man durch die Quadrirung die Werthe von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho_q$ und $r_1, r_2, r_3 \ldots r_q$ gefunden, so hat man auch die Werthe $\cos 2^m \varphi_1$, $\cos 2^n \varphi_2 \ldots\ldots \cos 2^s \varphi_q$ und hierdurch läßt sich leicht ausmitteln, welche Werthe von ϱ und r zusammengehören. Man verbindet zu diesem Behufe zuerst ϱ_1 mit r_1 und untersucht, ob der hieraus hervorgehende Werth von a_1 auch den bekannten Werth von $\cos 2^m \varphi_1$ giebt. Ist dieses nicht der Fall, so verbindet man ϱ_1 mit r_2 u. s. w. Bei dieser Rechnung kann man sich stets der trigonometrischen Tafeln bedienen, selbst wenn die Wurzeln über die Gränzen derselben hinaus berechnet werden sollen, indem man, um die zusammengehörigen Werthe von ϱ und r zu finden, die Werthe von φ nur angenähert zu kennen braucht.

Um auch dieses durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die so eben bearbeitete Gleichung noch einmal aufzulösen suchen, zugleich aber wollen wir uns die Aufgabe stellen, daß die Theile der unmöglichen Wurzeln bis auf 12 Ziffern genau gefunden werden sollen. Da wir uns hierbei nicht der logarithmischen Tafeln bedienen können, so müssen wir die Anzahl der Ziffern, die bei den Quadrirungen weggeworfen werden, bezeichnen, und dieses geschieht bequemer durch eine Zahl als durch angehängte Nullen, wie folgt:

1te Potenz: $x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$

2te „ $x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1$

4te „ $x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1$

8te „ $x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1$

16te „ $x^6 + 1731x^5 + 794886x^4 + 36911815x^3 + 1022312454x^2 + 63939x + 1$

32te „ $x^6 - 1406589x^5 + 506099674374x^4 + 262761406770_3x^3 + 1045118033396_6x^2$
$- 2043570813x + 1$

64te „ $x^6 - 966293266173x^5 + 256878165246_{12}x^4 + 988824235880_{18}x^3 + 1092271703728_{24}x^2$

128te „ $x^6 - 419966345758_{12}x^5 + 659883027704_{35}x^4 - 416611867058_{48}x^3$

256te „ $+ 435445610217_{82}x^4$

Setzt man jetzt in die obige Gleichung für x den Werth $z - 1$, so erhält man:

1te Potenz: $z^6 - 7z^5 + 22z^4 - 41z^3 + 48z^2 - 31z + 9 = 0$

2te „ $z^6 - 5z^5 + 6z^4 + 15z^3 + 158z^2 - 97z + 81$

4te „ $z^6 - 13z^5 + 502z^4 + 863z^3 + 28846z^2 + 16187z + 6561$

8te „ $z^6 + 835z^5 + 332134z^4 + 28650599z^3 + 810740198z^2 + 116198243z + 43046721$

16te „ $z^6 - 32957z^5 + 64087974022z^4 - 282502519186_3z^3 + 65065277432_6z^2$
$+ 562275735916_5z + 1853020188852_3$

32te „ $z^6 + 127089784195z^5 + 408994884874_{10}z^4 + 35903665561_{17}z^3$
$+ 4233808018351_{23}z^2 - 750194578488_{21}z$

64te „ $z^6 - 797191554924_{10}z^5 + 1672676983424_{31}z^4 + 345032091408_{46}z^3 + 179251303367_{59}z^2$

128te „ $+ 2797848840987_{74}z^4$

Bedient man sich jetzt der großen logarithmischen Tafeln von Vega (Thesaurus logarithmorum), so findet man:

$\log \varrho_1^2 = 0{,}3657770856$ und daher $\varrho_1^2 = 2{,}3215448900$
$\log \varrho_2^2 = 0{,}1973218313$ „ „ $\varrho_2^2 = 1{,}5751496880$
$\log \varrho_3^2 = 0{,}4369010831 - 1$ „ „ $\varrho_3^2 = 0{,}2734645800$
$\log r_1^2 = 0{,}6753658144$ „ „ $r_1^2 = 4{,}735499711$
$\log r_2^2 = 0{,}4379695344$ „ „ $r_2^2 = 2{,}7413818587$
$\log r_3^2 = 0{,}8409071606 - 1$ „ „ $r_3^2 = 0{,}6932775878$

Verbindet man jetzt ϱ_1^2 mit r_1^2, so zeigt sich, daß der daraus hervorgehende Werth von a_1 keinen solchen Winkel giebt, der auch dem bekannten Werthe von $\cos 128\varphi_1$ ein Genüge leistet, es ist dieses aber der Fall, wenn man ϱ_1 mit r_2 verbindet. Eben so und mit Hülfe der kleinern trigonometrischen Tafeln findet man, daß ϱ_2 und r_1, so wie ϱ_3 und r_3 zusammen gehören. Man hat daher die drei Wurzelpaare:

$$- 0{,}290081516 \pm 1{,}495793303\sqrt{-1}$$
$$+ 1{,}080175012 \pm 0{,}6390396166\sqrt{-1}$$
$$- 0{,}2900934961 \pm 0{,}4350980850\sqrt{-1}$$

Will man die Wurzeln noch genauer haben, so muß man zum Behufe der Wurzelausziehung die natürlichen Logarithmen der hierbei vorkommenden 6 Zahlen, aus welchen die 6 Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, r_1, r_2, r_3$ hervorgehen, berechnen, und hernach zu den resultirenden Logarithmen die zugehörigen Zahlen suchen, wobei man die Zahlwerthe je der beiden Theile der unmöglichen Wurzeln bis auf 12 Stellen genau findet. Diese Rechnung wird am bequemsten vermittelst der bekannten Hülfstafeln vollzogen.

Auf diesem Wege sind die Wurzeln der bekannten Gleichung:

$$x^4 - x + 1 = 0$$

bis auf 16 Stellen genau berechnet worden, welche Rechnung die Reihe der Beispiele schließen mag. Durch die Quadrirungen erhalten wir aus dieser Gleichung:

1te Potenz:		$x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 - x + 1 = 0$
2te	„	$x^4 + 0.x^3 + 3x^2 - x + 1$
4te	„	$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1$
8te	„	$x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 3x + 1$
16te	„	$x^4 + 12x^3 + 222x^2 + 19x + 1$
32te	„	$x^4 + 300x^3 + 48830x^2 + 83x + 1$
64te	„	$x^4 + 7660x^3 + 2384319102x^2 + 90771x + 1$
128te	„	$x^4 + 4709962604x^3 + 5684977578771474 7_2 x^2 - 3470736237x + 1$

Bei einer folgenden Quadrirung wächst der zweite Coefficient in Beziehung auf die ersten 16 Stellen quadratisch, wir schließen daher, daß die beiden größten Wurzeln unmöglich sind und da der dritte Coefficient weder annähernd quadratisch wächst, noch auch sein Zeichen beibehält, so sind auch die beiden folgenden Wurzeln unmöglich. Berechnet man jetzt den natürlichen Logarithmen des zweiten Coefficienten und dividirt diesen durch 128, so findet man:

$$\mathrm{l}.\varrho_1^2 = \quad 0{,}33737780357156190 \text{ und daher } \varrho_1^2 = 1{,}40126836793985490$$

eben so hat man: $\mathrm{l}.\varrho_2^2 = -0{,}33737780357156190$ „ „ $\varrho_2^2 = 0{,}71363917353690088$

Ferner findet man aus den beiden Gleichungen:

$$2\varrho_1 \cos\varphi_1 + 2\varrho_2 \cos\varphi_2 = 0$$

$$\frac{2\cos\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{2\cos\varphi_2}{\varrho_2} = 1$$

$$\varrho_1 \cos\varphi_1 = \frac{0{,}5\,\varrho_1^2\varrho_2^2}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} = \frac{0{,}5}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} \text{ und } \varrho_2\cos\varphi_2 = -\varrho_1\cos\varphi_1$$

Berechnet man dieses, so erhält man die vier Wurzeln:

$$-0{,}7271360844911968 \pm 0{,}9340992894605294\sqrt{-1}$$
$$+0{,}7271360844911968 \pm 0{,}4300142883297158\sqrt{-1}$$

Stern hat nur die beiden ersten Decimalen richtig und die von Legendre gefundenen Werthe sind genauer. Die beiden quadratischen Factoren der gegebenen Gleichung sind:

$$x^2 + 1{,}4542721689823936x + 1{,}4012683671398549 = 0$$
$$x^2 - 1{,}4542721689823936x + 0{,}71363917353690088 = 0$$

Berechnet man von dem Produkte dieser beiden Factoren den Coefficienten von x^2, so weicht dieser erst in der 17ten Decimale von 0 ab.

Aus dem bekannten Werthe des Modulus ϱ läßt sich auch der zugehörige Werth von $\cos\varphi$ noch auf folgende Weise berechnen. Hat man nämlich aus der Gleichung:

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots\ldots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0$$

einen Werth von ϱ gefunden, so muß der zugehörige Werth von $\cos\varphi$ so beschaffen seyn, daß $\varrho(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ in die Gleichung substituirt derselben ein Genüge leistet. Dadurch erhält man bekanntlich die beiden Gleichungen:

$$1)\quad \varrho^n \cos n\varphi + A_1\varrho^{n-1}\cos(n-1)\varphi + A_2\varrho^{n-2}\cos(n-2)\varphi \ldots\ldots + A_{n-2}\varrho^2\cos 2\varphi + A_{n-1}\varrho\cos\varphi + A_n = 0$$

$$2)\quad \varrho^n \sin n\varphi + A_1\varrho^{n-1}\sin(n-1)\varphi + A_2\varrho^{n-2}\sin(n-2)\varphi \ldots\ldots + A_{n-2}\varrho^2\sin 2\varphi + A_{n-1}\varrho\sin\varphi = 0$$

Ist n eine gerade Zahl, so multiplicire man die obere Gleichung mit $\cos\frac{n}{2}\varphi$ und die untere mit $\sin\frac{n}{2}\varphi$ und addire beide Gleichungen, so erhält man:

$$3)\quad [\varrho^n + A_n]\cos\frac{n}{2}\varphi + [A_1\varrho^{n-1} + A_{n-1}\varrho]\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi + [A_2\varrho^{n-2} + A_{n-2}\varrho^2]\cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\varphi \ldots\ldots + A_{\frac{n}{2}}\varrho^{\frac{n}{2}} = 0$$

Multiplicirt man aber die zweite Gleichung mit $\cos\frac{n}{2}\varphi$ und die erste mit $\sin\frac{n}{2}\varphi$ und zieht diese von jener ab, so kömmt:

$$4)\quad [\varrho^n - A_n]\sin\frac{n}{2}\varphi + [A_1\varrho^{n-1} - A_{n-1}\varrho]\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi + [A_2\varrho^{n-2} - A_{n-2}\varrho^2]\sin\left(\frac{n}{2}-2\right)\varphi \ldots\ldots \left[A_{\frac{n}{2}-1}\varrho^{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}+1}\varrho^{\frac{n}{2}-1}\right]\sin\varphi = 0$$

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so multiplicirt man auf dieselbe Weise mit den trigonometrischen Functionen von $\frac{n-1}{2}\varphi$ und erhält dadurch die beiden Gleichungen:

$$5)\quad \varrho^n\cos\frac{n+1}{2}\varphi + [A_1\varrho^{n-1} + A_n]\cos\frac{n-1}{2}\varphi + [A_2\varrho^{n-2} + A_{n-1}\varrho]\cos\frac{n-3}{2}\varphi \ldots\ldots A_{\frac{n+1}{2}}\varrho^{\frac{n+1}{2}} = 0$$

$$6)\quad \varrho^n\sin\frac{n+1}{2}\varphi + [A_1\varrho^{n-1} - A_n]\sin\frac{n-1}{2}\varphi + [A_2\varrho^{n-2} - A_{n-1}\varrho]\sin\frac{n-3}{2}\varphi \ldots\ldots \left[A_{\frac{n-1}{2}}\varrho^{\frac{n+1}{2}} - A_{\frac{n+1}{2}}\varrho^{\frac{n-1}{2}}\right]\sin\varphi = 0$$

Entwickelt man in diesen beiden Gleichungen die Sinus- und Cosinuszahlen nach Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitend, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$B_1\cos^p\varphi + B_1\cos^{p-1}\varphi + B_2\cos^{p-2}\varphi \ldots\ldots\ldots B_{p-1}\cos\varphi + B_p = 0$$

$$C_1\cos^{p-1}\varphi + C_2\cos^{p-2}\varphi + C_3\cos^{p-3}\varphi \ldots\ldots\ldots C_{p-1}\cos\varphi + C_p = 0$$

wobei in der letzten der gemeinschaftliche Factor $\sin\varphi$ herausgefallen ist und in beiden Gleichungen die Coefficienten aus ϱ und den Coefficienten der gegebenen Gleichung berechnet werden können. Ist n eine gerade Zahl, so hat man $p = \frac{n}{2}$ und ist n ungerade, so ist $p = \frac{n+1}{2}$, der Grad dieser beiden Gleichungen ist daher im Allgemeinen halb so groß als der Grad der gegebenen Gleichung. Für dasselbe ϱ haben alsdann beide Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel $\cos\varphi$, die durch Division derselben gefunden werden kann. Allein gerade dieses Aufsuchen einer gemeinschaftlichen Wurzel ist in den Fällen, wo der Grad der gegebenen Gleichung beträchtlich ist, eine sehr mühsame Operation, die bei jeder Wurzel wiederholt werden muß, und daher kömmt man durch die früher angegebene Methode in den meisten Fällen schneller zum Ziele.

Zur Vervollständigung der in dem Vorhergegangenen entwickelten Methode ist es erforderlich noch einige specielle Fälle hinsichtlich der Beschaffenheit der Wurzeln hier näher zu untersuchen. Liegen nämlich die Werthe zweier reellen Wurzeln so nahe bei einander, daß sie bei einer Anzahl von Quadrirungen, wodurch alle übrigen Wurzeln bereits von einander geschieden wurden, noch nicht getrennt erscheinen, so können wir dadurch sehr leicht verleitet werden, auf ein Paar unmögliche Wurzeln zu schließen und das Produkt der beiden Wurzeln als den Modulus derselben anzusehen. Alsdann bestimmen wir wie vorhin den Werth von $a = \varrho\cos\varphi$, nur ist in diesem Falle φ unmöglich, und berechnen hierauf $b\sqrt{-1} = \sqrt{\varrho^2 - \varrho^2\cos^2\varphi}\sqrt{-1}$, welches alsdann eine reelle Größe ist.

Es ist daher in diesem Falle durchaus nicht erforderlich, die Quadrirung so lange fortzusetzen, bis die beiden naheliegenden Wurzeln getrennt erscheinen, sondern nur bis man ihr Produkt erhalten hat. Die weitere Berechnung erfolgt hierauf nach denselben Regeln, nach welchen die unmöglichen Wurzeln berechnet wurden, indem die reellen Wurzeln ebenfalls auf die Form $a \pm b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ gebracht werden können, nur daß alsdann b oder φ unmöglich ist. Da hierbei ϱ^2 auch negativ seyn kann, so muß man in zweifelhaften Fällen die gefundenen Wurzeln stets durch die ebenfalls bekannten Werthe von $\cos 2^m\varphi$ rc. controliren.

Wenn ferner ein Paar unmöglicher Wurzeln so beschaffen ist, daß bei den Quadrirungen das Unmögliche verschwindet, so scheint die Gleichung zwei gleiche reelle Wurzeln mit gleichen oder entgegengesetzten Zeichen zu besitzen. Durch die Substitution der nächsten Gränzwerthe dieser Wurzeln, durch welche man das Zeichen derselben zu bestimmen sucht, überzeugt man sich aber sogleich vom Gegentheil und alsdann berechnet man aus dem bekannten Modulus wie vorhin die beiden Theile der unmöglichen Wurzeln.

Es kann auch eine Gleichung drei und mehrere gleich große Wurzeln enthalten, wobei sie reell oder unmöglich seyn können; allein auch diese Fälle können durch die Quadrirung sehr leicht gelöst werden, denn man überzeugt sich sehr bald, daß man bei drei gleich großen Wurzeln nach m Quadrirungen aus der gegebenen Gleichung vom n^{ten} Grade erhält:

$$x^n - (\alpha_1^r + \alpha_2^r + \alpha_3^r)x^{n-1} + (\alpha_1^r\alpha_2^r + \alpha_1^r\alpha_3^r + \alpha_2^r\alpha_3^r)x^{n-2} - \alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r x^{n-3}$$
$$+ \alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r\overset{1}{C}(4\ldots n)x^{n-4} + \ldots\ldots (-1)^n\alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r\overset{n-3}{C}(4\ldots n)$$

wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß diese drei Wurzeln α_1, α_2 und α_3 die größten sind; ist dieses nicht der Fall, so wird die obige Beziehung in den drei ersten Coefficienten erst in drei nachfolgenden eintreten, welche alsdann die vorhergehenden Wurzeln als gemeinschaftliche Factoren haben. Sind die drei Wurzeln α_1, α_2 und α_3 wiederholte Wurzeln, so haben die drei Coefficienten die Form:

$$-3\alpha_1^r,\ +3\alpha_1^{2r},\ \text{und}\ -\alpha_1^{3r},$$

welche als Criterium für diesen Fall dient. Haben sie aber diese Form nicht, so schließen wir auf eine reelle Wurzel und zwei unmögliche Wurzeln. In beiden Fällen giebt der Coefficient α_1^{3r} entweder die dreimal wiederholte Wurzel α_1 oder die Wurzel α_1 und den Modulus α_1^2.

Eben so erhält man, wenn die vier ersten Wurzeln gleich groß sind, nach m Quadrirungen den Ausdruck:

$$x^n - (\alpha_1^r + \alpha_2^r + \alpha_3^r + \alpha_4^r)x^{n-1} + (\alpha_1^r\alpha_2^r + \alpha_1^r\alpha_3^r + \alpha_1^r\alpha_4^r + \alpha_2^r\alpha_3^r + \alpha_2^r\alpha_4^r + \alpha_3^r\alpha_4^r)x^{n-2}$$
$$- (\alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r + \alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_4^r + \alpha_1^r\alpha_3^r\alpha_4^r + \alpha_2^r\alpha_3^r\alpha_4^r)x^{n-3} + \alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r\alpha_4^r x^{n-4} - \alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r\alpha_4^r \overset{1}{C}(5\ldots n)x^{n-5}$$
$$+ \alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r\alpha_4^r \overset{2}{C}(5\ldots n)x^{n-6}\ \ldots\ldots\ (-1)^n\alpha_1^r\alpha_2^r\alpha_3^r\alpha_4^r \overset{n-4}{C}(5\ldots n)$$

und haben alsdann die vier ersten Coefficienten die Form:

$$-4\alpha_1^r + 6\alpha_1^{2r},\ -4\alpha_1^{3r},\ +\alpha_1^{4r}$$

so weist dieses auf wiederholte Wurzeln hin; ist dieses aber nicht der Fall, so hat man entweder vier unmögliche Wurzeln oder zwei unmögliche und zwei wiederholte Wurzeln, deren weitere Unterscheidung dadurch gemacht wird, daß man aus dem bekannten Modulus α_1^2, wie vorhin den Werth von a_1 berechnet. Es versteht sich wohl von selbst, daß α_1^r erst in einem spätern Coefficienten erscheint, wenn α_1 nicht den größten Werth unter den Wurzeln hat.

Es wäre übrigens eine ermüdende Weitläuftigkeit, wollte man noch weiter gehen und durch eine allgemeine Formel den Fall ausdrücken, wenn die Gleichung p gleich große Wurzeln enthält, da diese nach dem Gesagten sogleich niedergeschrieben werden kann.

Wenn wir zum Schluß dieser Untersuchungen die Vortheile ins Auge fassen, die unsere neue Methode gewährt, so dürften diese in Folgendem bestehen. Wir brauchen zunächst mit der gegebenen Gleichung durchaus keine Prüfung weder hinsichtlich der Unterscheidung der unmöglichen Wurzeln von den reellen noch in Beziehung auf die nähern oder entfernteren Gränzen der letzteren vorzunehmen, indem die Beschaffenheit der Wurzeln oft schon nach einigen Quadrirungen mit Ausnahme einiger wenigen so eben erwähnten Fälle ohnzweifelhaft hervortritt. Wir haben es ferner als einen wesentlichen Vortheil dieser Methode zu betrachten, daß durch sie nicht nur die unmöglichen Wurzeln, welche allein die Preisfrage berücksichtigt, sondern auch die reellen Wurzeln gefunden werden und zwar, wie wir schon bemerkt haben, wenn nicht bloß eine einzelne Wurzel gesucht wird, leichter als nach jeder andern Methode, mag man sich bei den Quadrirungen der Logarithmen bedienen oder die dabei erforderlichen Multiplikationen direkt ausführen. Hierbei ist noch zu bemerken, daß bei diesen Multiplikationen die Produkte nicht weiter entwickelt zu werden brauchen, als sie zu der vorgeschriebenen Zahl von Stellen der gesuchten Wurzeln etwas beitragen, und daß hierdurch große Erleichterungen bei der Rechnung eintreten, indem oft schon nach wenigen Quadrirungen gegen die Quadrate der Coefficienten die doppelten Produkte der entfernter liegenden Coefficienten gänzlich wegfallen. Hieraus folgt wieder, daß der Rechnungsaufwand wenig mehr als im Verhältnisse mit der Anzahl der Wurzeln wächst, welches nicht einmal bei den Regeln der Fall ist, die wir bisher zur Aufsuchung der reellen Wurzeln angewendet haben. Nur bei dem Uebergange von 2 Paar unmöglicher Wurzeln zu 3 Paar derselben wächst die Arbeit in einem größern Verhältnisse, von hieraus aber wieder in dem vorigen Verhältnisse.

Will man ferner nur angenäherte Werthe der Wurzeln haben, z. B. nur die ersten drei oder vier Ziffern derselben, so berechnet man auch die Coefficienten nur auf so viele Stellen und alsdann kömmt man sehr schnell zum Ziele, so daß man meistens zu den Wurzelausziehungen nicht einmal der Logarithmen bedarf. Hat man z. B. die Gleichung:

$$x^4 - 56x^3 + 840x^2 - 3360x + 1680 = 0$$

so erhält man hieraus 2te Pot.: $x^4 - 1456x^3 + 3326_2x^2 - 8468_3x + 2822_3$

4te „ $x^4 - 1454_3x^3 + 8598_7x^2 - 6983_{10}x$

8te „ $x^4 - 1943_9x^3 + 7189_{18}x^2$

Von jetzt an wachsen alle Coefficienten quadratisch und es sind daher alle Wurzeln reell. Es ist also

$\alpha_1^8 = 1943_9$ und hieraus $\alpha_1^4 = 1394_3$ oder $\alpha_1^2 = 1180$ und $\alpha_1 = 34,37$

$\alpha_1^8\alpha_2^8 = 7189_{18}$ „ „ $\alpha_1^4\alpha_2^4 = 8479_7$ „ $\alpha_1^2\alpha_2^2 = 2912_2$ und $\alpha_2 = 539,7$

Ferner $\alpha_1^4\alpha_2^4\alpha_3^4 = 6983_{10}$ „ $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = 8357_3$ und $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2891$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1680$

Es sind daher die vier Wurzeln:

$$\alpha_1 = 34,37, \; \alpha_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1} = 15,71, \; \alpha_3 = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2} = 5,357 \text{ und } \alpha_4 = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0,581$$

Bei genauerer Berechnung erhält man:

$$\alpha_1 = 34,35455$$
$$\alpha_2 = 15,70785$$
$$\alpha_3 = 5,35639$$
$$\alpha_4 = 0,58121$$

Berechnet man auf diese Weise die Wurzeln nur auf drei oder vier Stellen und bedient sich bei den Wurzelausziehungen der Logarithmen, so erhält man in vielen Fällen schneller angenäherte Werthe aller Wurzeln, als nach der Methode Fouriers nur die nächsten Gränzen der reellen Wurzeln.

Endlich besitzen wir dadurch, daß bei den Quadrirungen auch noch die Cosinuszahlen der vielfachen Bogenzahlen hervorgehen, welche den unmöglichen Wurzeln angehören, eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung in Beziehung auf die letztern.

Die Entwickelung der Wurzeln bis auf eine beliebige Anzahl von Stellen scheint zwar durch die zuletzt erforderlichen Wurzelausziehungen an die Gränze unserer logarithmischen Tafeln gebunden zu seyn, allein wenn man über dieselben hinausgehen will, so kann man, wie wir es früher gemacht haben, für die wenigen Zahlen, die dabei vorkommen, die einzelnen Logarithmen berechnen und umgekehrt aus diesen wieder die Zahlen ableiten oder auch selbst wie in dem obigen Beispiele durch successives Quadratwurzelausziehen, wobei man aber jedesmal die Quadratwurzel so weit als möglich entwickelt und alles über die Gränze der Quadratzahl Hinausgehende wegwirft, zu den gesuchten Wurzeln kommen, ohne daß dadurch mehrere Stellen derselben verloren gehen; so wie wir denn überhaupt alle Regeln, durch welche wir bei den hier erforderlichen Rechnungen mit abgekürzten Zahlen die letzten Ziffern so genau als möglich zu erhalten suchen, nebst der Bestimmung der äußersten Gränzen, innerhalb welcher sich der zu befürchtende Fehler befindet, hier als bekannt voraussetzen.

Zum Schluß wollen wir als Berichtigung noch die Bemerkung hinzufügen, daß wir zu den wiederholten Wurzeln auch diejenigen gerechnet haben, die bei gleichem Zahlwerthe entgegengesetzte Zeichen besitzen, indem dieser Zeichenunterschied bei den Quadrirungen verschwindet. Aus demselben Grunde heißen naheliegende Wurzeln solche, deren Zahlwerthe, abgesehen vom Zeichen, eine geringe Differenz besitzen. Endlich bemerken wir noch, daß auf Seite 25 Zeile 1 v. oben der Ausdruck $k = \frac{\varrho_p^2 - \varrho_{p+1}^2}{4}$ aus Versehen stehen geblieben ist.